PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 6. 15. März 1907. 8. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 7 am 18. März 1907.

INHALT.

Originalmitteilungen:

Mitteilungen aus dem physikalischen Institut der Universität Bologna: No. 14: A. Righi, Über die elektromagnetische Masse des Elektrons. S. 161.

J. Farkas, Über das Postulat der Relativität. S. 169.

J. Kunz, Lösung des Theoremes von Poincaré-Lorentz mit Hilfe des Greenschen Satzes. S. 171.

R. S. Willows, Elektrischer Widerstand von Legierungen. S. 173.

F. Bidlingmaier, Über eine höchst empfindliche Methode zur Untersuchung von Inhomogenitäten im magnetischen Felde. (Ein neuer Galvanometertypus.) S. 176.

K. v. Wesendonk, Einige Bemerkungen zu Herrn Boltzmanns Theorie der Zusammenstöße allgemeinster Art. S. 179.

M. Reinganum, Die Temperaturstrahlung des Joddampfes. S. 182.

A. S. Eve, Die Absorption der γ-Strahlen radioaktiver Substanzen. S. 183.

A. S. Eve, Über das Verhältnis der Aktivitäten von Radium und Thor, gemessen durch ihre γ-Strahlung. S. 188.

Besprechungen:

B. Monasch, Elektrische Beleuchtung. S. 190.

G. Huldschiner, Über das Pendeln parallelgeschalteter Drehstromgeneratoren. S. 190.

H. Schröder, Ton und Farbe. S. 190.

H. Schröder, Naturharmonien. S. 191.

H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. S. 191.

A. Wagener, Indizieren und Auswerten von Kurbelweg- und Zeitdiagrammen. S. 192.

Tagesereignisse. S. 192.

Personalien. S. 192.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Mitteilungen aus dem physikalischen Institut der Universität Bologna. (Direktor: A. Righi.)

No. 14 [1]): Augusto Righi, Über die elektromagnetische Masse des Elektrons.

1. Bekanntlich besitzt ein in Bewegung begriffener elektrischer Körper außer seiner mechanischen Energie noch einen Überschuß von Energie elektromagnetischen Ursprungs. Dasselbe gilt von einem Elektron, welches, als eine elektrische Ladung ohne materielle Masse betrachtet, auf diese Weise eine gewisse scheinbare Masse annimmt.

Man hat wiederholt versucht, die Beziehung festzustellen, welche zwischen der scheinbaren Masse des Elektrons und seiner Geschwindigkeit besteht. Das ist indessen nur unter der Annahme gewisser mehr oder minder befriedigender Hypothesen über das von dem Elektron erzeugte elektromagnetische Feld, oder unter der Zugrundelegung eines endlichen Volumens und einer bestimmten Gestalt für das Elektron gelungen.

In der vorliegenden Arbeit beabsichtige ich, einige weitere Aufschlüsse für den Fall eines in gleichförmiger geradliniger Bewegung begriffenen Elektrons beizubringen, und ferner eine neue Hypothese aufzustellen, durch deren Annahme man auf ganz einfache Weise zum Ziele gelangt.

2. Die Berechnung der scheinbaren Masse eines Elektrons läßt sich, wie ersichtlich werden wird, auf die Berechnung seiner Energie zurückführen. Für diese gilt der bekannte Ausdruck:

$$\int \frac{F_e^2}{8\pi} d\tau + \int \frac{F_m^2}{8\pi} dt.$$

Hier bezeichnet $d\tau$ ein Volumenelement, F_e und F_m bezeichnen die elektrische bzw. die magnetische Kraft in eben diesem Element, und die Integrale sind über den ganzen Raum zu erstrecken, der das Elektron umgibt. So einfach heutzutage diese Untersuchung erscheinen mag, so hat es doch gewisse Zeiten gegeben, in denen sie keineswegs klargestellt war, und es dürfte von Nutzen sein, darauf hinzuweisen.

Zuerst berechnete man die Energie, indem man für die Kräfte F_e und F_m gewisse Ausdrücke zugrunde legte, die nicht genau, sondern nur angenähert waren, und die man nur in dem Grenzfalle annehmen darf, daß es sich um ein Elektron handelt, welches mit einer im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit sehr kleinen Geschwindigkeit begabt ist. Man machte nämlich die Annahme: daß einmal die elektrische Kraft in einem gegebenen Punkte und in einem gegebenen Augenblick dieselbe wäre, als wenn das Elektron an dem Orte, den es in diesem Augenblicke einnimmt, unbeweglich bliebe; daß zweitens die magnetische Kraft den Wert besäße, der sich aus dem Laplaceschen Gesetz ableiten läßt, wenn man ein Stromelement gleich dem Produkte aus der bewegten Ladung und ihrer Geschwindigkeit setzt. Auf solche Weise fand man für die elektromagnetische Masse einen Näherungswert, und zwar:

$$m_0 = \frac{2e^2}{3\varrho V^2},$$

1) No. 13: diese Zeitschr. **8**, 150, 1907.

wenn man mit V die Lichtgeschwindigkeit, mit e die das Elektron darstellende elektrische Ladung und mit ϱ den Halbmesser dieses als kugelförmig angenommenen Elektrons bezeichnet.

Als man dann später die genauen Formeln für den Ausdruck der elektrischen und der magnetischen Kraft in einem beliebigen Raumpunkte und für einen beliebigen Zeitpunkt kennen lernte, schlug man für die Berechnung der elektromagnetischen Masse einen indirekten Weg ein. Dieser führte zu einem Ergebnis, das von dem, zu welchem wir im § 8 gelangen werden, abweicht. Übrigens ist, wie ich weiterhin zeigen werde, die Formel, welche man fand, dieselbe, zu der man gelangen würde, wenn man nur den zweiten Ausdruck für die Energie berücksichtigen würde.

Es wäre übrigens bei Befolgung der hier angewandten Methode leicht gewesen, in diese Unklarheit zu verfallen. Wenn man nämlich für die elektrische Kraft F_e des in Bewegung befindlichen Elektrons den gleichen Ausdruck annahm, der für eine ruhende Ladung gilt, so war der Ausdruck $\frac{1}{8\pi}\int F_e^2\, d\tau$ nichts anderes als die elektrostatische Energie $\frac{e^2}{2\varrho}$, während der Ausdruck $\frac{1}{8\pi}\int F_m^2\, d\tau$ für sich allein genau den Überschuß an Energie darstellte, welchen das Elektron infolge seiner Eigenbewegung besaß. Es war also vollkommen richtig, aus ihm den Wert für die scheinbare Masse abzuleiten, indem man ihn der lebendigen Kraft des Elektrons gleichsetzte. Man konnte also ohne weiteres dasselbe tun, nämlich die scheinbare Masse allein aus der magnetischen Energie entnehmen, wenn man die genauen Ausdrücke für F_e und F_m kannte. Man würde indessen bei solchem Verfahren einen Fehler begehen, insofern als in diesem Falle auch der Ausdruck $\frac{1}{8\pi}\int F_e^2\, d\tau$ eine Funktion der Geschwindigkeit ist und daher die gebührende Berücksichtigung finden muß.

3. Aber auch ganz abgesehen hiervon entstand eine Schwierigkeit, als man zur Berechnung der Energie die Integration über den ganzen Raum erstrecken mußte. Während nämlich die Formeln, welche die Kräfte F_e und F_m ausdrücken, unter der Annahme aufgestellt worden waren, daß das Elektron auf einen einfachen Punkt beschränkt, also ohne merkliches Volumen, sei, mußte man nunmehr die Integration auf den Raum außerhalb einer kleinen Kugel beschränken, deren Mittelpunkt das Elektron bildete, um zu vermeiden, daß der Wert für die Energie unendlich wurde. Auf diese Weise kam man nun dazu, eine Hypothese einzuführen, die höchstens als Näherung annehmbar sein kann, nämlich anzunehmen, daß das von der kleinen in Bewegung befindlichen elektrisierten Kugel erzeugte elektromagnetische Feld mit dem des zuvor betrachteten Elektrons identisch sei.

4. Will man diese wenig befriedigende Hypothese vermeiden, so muß man dem Elektron ein wenn auch noch so kleines endliches Volumen und eine bestimmte Gestalt zuschreiben, man muß annehmen, daß in ihm die elektrische Ladung in bestimmter Weise verteilt sei, etwa über das ganze Volumen, oder über die Oberfläche, und muß dann die neuen Formeln für den Ausdruck des elektromagnetischen Feldes aufstellen. Will man ferner zu einer Vergleichung zwischen den Ergebnissen der Rechnung und den Versuchsergebnissen gelangen, so muß man diese Formel nicht sowohl für den besonderen Fall der gleichförmigen geradlinigen Bewegung aufstellen, als vielmehr für den allgemeinen Fall, weil sich nämlich die Versuche, aus denen man die Masse des Elektrons erhält, auf Elektronen beziehen, die mit einer Bewegung begabt sind, die keineswegs geradlinig und gleichförmig ist.

Aus diesen neuen Forderungen entstanden beachtenswerte mathematische Untersuchungen, welche zu verschiedenen Ausdrücken für die elektromagnetische Masse führten.[1]) Kaufmann fand, daß unter all diesen Ausdrücken der von Abraham erhaltene am besten mit seinen bekannten Versuchsergebnissen im Einklang stand.

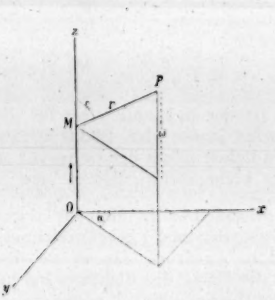
Indessen darf man sich nicht verhehlen, daß diese Untersuchungen bei all ihrer bewunderungswürdigen Gründlichkeit den Forscher nicht vollkommen zu befriedigen vermögen, der das Elektron als die Grundeinheit betrachtet, die charakterisiert und bestimmt wird durch die besonderen Modifikationen des Äthers, welche das elektromagnetische Feld darstellen, und der dieses Elektron zur Grundlage einer allgemeinen physikalischen Theorie macht. Macht man sich nämlich gemäß der heutigen Richtung eine solche Auffassung zu eigen, so ist eine Elektrizitätsverteilung in einem Körper nichts anderes als eine Elektronenverteilung,

1) Lorentz, Versl. Kon. Akad., Amsterdam, 27. Mai 1904.
Morton, Phil. Mag. **41**, 488.
Searle, Phil. Mag. **44**, 329.
Einstein, Ann. d. Phys. (4) **17**, 891, 1905.
Bucherer, Mathematische Einführung in die Elektronentheorie, S. 58.
Abraham, Ann. d. Phys. (4) **10**, 105, 1903.
Brillouin, C. R. **141**, 493, 1905.

und der Ausdruck „Elektrizitätsmenge" ist gleichbedeutend mit dem Ausdruck „bestimmte Anzahl von Elektronen"; dagegen weiß man nicht mehr, welche Deutung man Ausdrücken wie den folgenden beilegen soll: „elektrische Ladung eines Volumelements", eines Elektrons oder: „Verteilung der Elektrizität in einem Elektron", u. a.

Eben diese Überlegung dürfte mich, wenigstens bis zu einem gewissen Grade, rechtfertigen, wenn ich es unternehme, nochmals den Fall der scheinbaren Masse eines in geradliniger gleichförmiger Bewegung begriffenen Elektrons zu untersuchen, obgleich bislang noch kein Versuch bekannt ist, der zur Bestätigung der Rechnung dienen könnte.

Ich will zunächst auseinandersetzen, wie man unter Annahme der in § 3 gekennzeichneten Hypothese die Masse des Elektrons findet, nämlich unter der Annahme, daß das elektromagnetische Feld eines kugelförmigen Elektrons von kleinem Halbmesser sich durch die Formeln darstellen läßt, welche ohne Berücksichtigung des Volumens des Elektrons aufgestellt worden sind. Darnach werde ich die analoge Untersuchung auf Grund einer abweichenden Hypothese durchführen, welche mir annehmbarer erscheint.



5. In der Figur sei O die Lage, welche das mit der Ladung e [1]) versehene Elektron, das sich mit der konstanten Geschwindigkeit v längs der z-Achse bewegt, zur Zeit $t = 0$ einnimmt, und M die Lage, welche es zur Zeit t innehat. Dann wird also

$$OM = vt$$

sein. Es sei P ein Punkt mit den Koordinaten x, y, z. Es sei r seine Entfernung von M, ε der Winkel zwischen MP und der z-Achse, α der Winkel zwischen der Ebene OMP und der x-z-Ebene. Endlich werde

$$\omega = z - vt$$

gesetzt, so daß nunmehr x, y, z die Koordinaten von P in bezug auf ein zu dem ursprünglichen paralleles Achsensystem sein werden, dessen Anfangspunkt M aber in dem beweglichen Elektron liegt. Wir setzen weiter:

$$a = \frac{v}{V},$$

wo V die Lichtgeschwindigkeit ist, und endlich, der Kürze halber,

$$s^2 = (x^2 + y^2)(1 - a^2) + \omega^2.$$

Dann ist die elektrische Kraft F_e im Punkte P längs MP gerichtet und hat den Wert:

$$F_e = \frac{e(1 - a^2)}{r^2(1 - a^2 \sin^2 \varepsilon)^{3/2}}.$$

Ihre Komponenten nach den Achsen sind:

$$X = \frac{e(1 - a^2)x}{s^3},$$

$$Y = \frac{e(1 - a^2)y}{s^3},$$

$$Z = \frac{e(1 - a^2)\omega}{s^3}.$$

Die magnetische Kraft F_m ist senkrecht zur Ebene OMP gerichtet und hat den Wert:

$$F_m = \frac{ea(1 - a^2)\sin\varepsilon}{r^2(1 - a^2\sin^2\varepsilon)^{3/2}} = F_e a \sin\varepsilon.$$

Ihre Komponenten sind:

$$L = \frac{ea(1 - a^2)y}{s^3},$$

$$M = -\frac{ea(1 - a^2)x}{s^3},$$

$$N = 0.$$

Die sechs Komponenten genügen natürlich den Hertzschen Gleichungen. Ich habe sie sogar aus diesen abgeleitet [1]), ohne damals davon Kenntnis gehabt zu haben, daß von anderen Seiten nach abweichenden Methoden [2]) bereits identische oder wenigstens gleichwertige Formeln gegeben worden waren.

Bezeichnen wir nunmehr mit E die Energie des Elektrons, mit U ihren von F_e abhängigen Teil, den man als elektrische Energie zu bezeichnen pflegt, mit W ihren von F_m abhängigen Teil, das heißt die magnetische Energie, so erhalten wir:

$$E = U + W,$$

1) Mem. della R. Acc. di Bologna, 24. Februar 1901.

1) Um mich nicht gar zu sehr von der allgemein üblichen Bezeichnungsweise zu entfernen, habe ich e und s an Stelle der in der angeführten Arbeit angewandten Buchstaben E und ε eingesetzt.

2) J. J. Thomson, Recent Research in Electricity and Magnetism.
O. Heaviside, Phil. Mag. 1889, S. 324.

$$U=\frac{e^2(1-a^2)^2}{8\pi}\int\frac{d\tau}{r^4(1-a^2\sin^2\varepsilon)^3},$$

$$W=\frac{e^2a^2(1-a^2)^2}{8\pi}\int\frac{d\tau\cdot\sin^2\varepsilon}{r^4(1-a^2\sin^2\varepsilon)^3}.$$

Legt man ein System von Polarkoordinaten zugrunde, so wird das Volumenelement

$$d\tau=r\sin\varepsilon\,d\alpha\cdot r\,d\varepsilon\cdot dr,$$

und sonach:

$$U=\frac{e^2(1-a^2)^2}{8\pi}\iiint\frac{\sin\varepsilon\,d\varepsilon\,d\alpha\,dr}{r^2(1-a^2\sin^2\varepsilon)^3},$$

$$W=\frac{e^2a^2(1-a^2)^2}{8\pi}\iiint\frac{\sin^3\varepsilon\,d\varepsilon\,d\alpha\,dr}{r^2(1-a^2\sin^2\varepsilon)^3}.$$

Die Integration nach α muß zwischen den Grenzen 0 und 2π erfolgen, die nach ε zwischen 0 und π, und die nach r zwischen ϱ und ∞, wo ϱ der Halbmesser des Elektrons ist. Wie bereits im § 3 erwähnt worden ist, würde man bei der Integration zwischen den Grenzen 0 und π für die Energie einen unendlichen Wert erhalten. Es dürfte noch gut sein zu erwähnen, daß die Integration nach ε leicht ausführbar ist, wenn man für ε eine neue Variable $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\cos\varepsilon$ einführt.

Man erhält so die folgenden Gleichungen:

$$U=\frac{e^2}{8\varrho}\left|\frac{5}{2}-a^2+\frac{3\,Ar\sin a}{2a\sqrt{1-a^2}}\right|,$$

$$W=\frac{e^2}{8\varrho}\left|\frac{1}{2}+a^2-\frac{(1-4a^2)\,Ar\sin a}{2a\sqrt{1-a^2}}\right|,$$

$$E=\frac{e^2}{8\varrho}\left|3+\frac{(1+2a^2)\,Ar\sin a}{a\sqrt{1-a^2}}\right|.$$

Die erste dieser Formeln bestätigt die weiter oben aufgestellte Behauptung, daß die sogenannte elektrische Energie auch ihrerseits eine Funktion der Geschwindigkeit ist.

6. Bevor wir weitergehen, ist es von Nutzen, zu untersuchen, worauf sich die vorstehenden Formeln für den Fall reduzieren, daß v sehr klein gegenüber V wird, also unter der Annahme, daß a eine sehr kleine Größe ist.

Man findet sofort für die elektrische Kraft:

$$X=\frac{ex}{r^3},$$

$$Y=\frac{ey}{r^3},$$

$$Z=\frac{ez}{r^3},$$

$$F_e=\frac{e}{r^2};$$

für die magnetische Kraft:

$$L=\frac{evy}{Vr^3},$$

$$M=-\frac{evx}{Vr^3},$$

$$N=0,$$

$$F_m=\frac{ev\sin\varepsilon}{Vr^2};$$

und endlich für die Energie:

$$U=\frac{e^2}{2\varrho},$$

$$W=\frac{e^2v^2}{3\varrho V^2},$$

$$E=\frac{e^2}{2\varrho}+\frac{e^2v^2}{3\varrho V^2}.$$

In diesem Falle hängt U nicht von v ab, und die magnetische Energie stellt daher hier tatsächlich für sich allein den Überschuß an Energie dar, den das Elektron infolge seiner Eigenbewegung besitzt. Bezeichnet man also mit m_0 die scheinbare oder elektromagnetische Masse des Elektrons, das heißt die materielle Masse, welche es besitzen müßte, um infolge der Geschwindigkeit v eine mechanische Energie gleich W zu gewinnen, so erhält man:

$$\frac{1}{2}m_0v^2=W,$$

und hieraus:

$$m_0=\frac{2W}{v^2}=\frac{2e^2}{3\varrho V^2}.$$

Dies ist der bekannte Wert für die elektromagnetische Masse des Elektrons, wenn die Geschwindigkeit v, mit der es begabt ist, gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sehr klein ist.

7. Es handelt sich nunmehr darum, unter Beibehaltung der im § 3 gekennzeichneten Hypothese, den Ausdruck für m zu finden, das heißt für die Masse des Elektrons bei beliebigem Werte der Geschwindigkeit v zwischen 0 und V. Der Zweck ist einfach, eine Lücke auszufüllen; dieser Ausdruck ist nämlich noch nicht in strenger Weise berechnet worden.

Würde man in den im § 2 angedeuteten Irrtum verfallen und wiederum

$$\frac{1}{2}mv^2=W$$

setzen, also dabei verabsäumen, dem Umstande Rechnung zu tragen, daß nicht nur die magnetische Energie W, sondern auch die elektrische Energie U von v abhängt, so würde man erhalten:

$$m=\frac{e}{8\varrho a^2V^2}+\frac{e^2}{4\varrho V^2}-\frac{e^2(1-4a^2)\,Ar\sin a}{8a^3\varrho V^2\sqrt{1-a^2}}.$$

Nun läßt sich leicht nachweisen, daß diese Formel mit der nach einer anderen Methode von J. J. Thomson[1]) gefundenen gleichbedeutend ist, die daher nicht annehmbar erscheint. Es ist allerdings richtig, daß der genannte Autor findet, daß diese Formel mit den Versuchsergebnissen von Kaufmann mit einer Annäherung von zehn Prozent gut übereinstimmt. Indessen kann man, abgesehen davon, daß diese Übereinstimmung eine zufällige sein kann, bemerken, daß die von Kaufmann bei seinen letzten Messungen erreichte Genauigkeit eine größere Annäherung verlangt. Auf alle Fälle bliebe zu beweisen, daß die scheinbare Masse eines Elektrons, das sich in der Weise wie bei den Versuchen von Kaufmann bewegt, dieselbe sein muß, als wenn das Elektron sich geradlinig und gleichförmig bewegt.

8. Meines Erachtens ist der natürliche Weg zur Berechnung der scheinbaren Masse m der, die lebendige Kraft $\frac{1}{2} m v^2 = E - \frac{e^2}{2\varrho}$ zu setzen.

Wenn nämlich die Geschwindigkeit des Elektrons gleich Null wäre, so würde es die Energie $\frac{e^2}{2\varrho}$ besitzen, während die Energie infolge seiner Bewegung E ist. Also ist $E - \frac{e^2}{2\varrho}$ der Teil der Energie, welchen das Elektron seiner Eigenbewegung verdankt, und es wäre vielleicht zweckmäßig, diesen Teil als „elektromagnetische Energie" des Elektrons zu bezeichnen, gerade wie man die Größe $\frac{e^2}{2\varrho}$ als „elektrostatische Energie" bezeichnet, und dann die Bezeichnungen „elektrische Energie" und „magnetische Energie", welche von vielen Autoren für U und W angewendet werden, ganz auszumerzen.

Da nun $E - \frac{e^2}{2\varrho}$ der von der Bewegung herrührende Überschuß an Energie ist, so muß man, wenn man mit m die scheinbare Masse des Elektrons bezeichnet, oder die materielle Masse, die es besitzen müßte, um diesen Überschuß an Energie zu erklären, also genau setzen:

$$\frac{1}{2} m v^2 = E - \frac{e^2}{2\varrho}.$$

Aus dem für E berechneten Werte findet man dann:

$$m = \frac{e^2}{4\varrho V^2} \cdot \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{(1 + 2a^2) A \sin a}{a\sqrt{1-a^2}} - 1 \right\},$$

und weiter, wenn man die kleinen Geschwindigkeiten entsprechende scheinbare Masse m_0 einführt:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{3}{8a^2} \left\{ \frac{(1 + 2a^2) A \sin a}{a\sqrt{1-a^2}} - 1 \right\}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck in Reihe, so erhält man:

$$m = m_0 \left(1 + \frac{7}{10} a^2 + \cdots\right) =$$

$$= m_0 \left(1 + \frac{7}{10} \cdot \frac{v^2}{V^2} + \cdots\right).$$

Vernachlässigt man hierin die höheren Potenzen von v, so findet man den früheren angenäherten Ausdruck, der für kleine Geschwindigkeiten gilt, von dessen Wert er sich, wie ersichtlich, unabhängig ergibt. Dieser Umstand eben gestattet, die Hypothese vom elektrischen Ursprung aller materiellen Masse anzunehmen, das heißt, die Atome und die Ionen als Aggregate positiver und negativer Ionen zu betrachten, und spezieller, sich die Atome als aus Elektronen der beiden Vorzeichen und von gleicher Anzahl bestehend, und die Ionen in ähnlicher Weise, aber mit einem Überschuß von einem Elektron oder mehreren Elektronen (je nach der Wertigkeit) von einer der beiden Gattungen gebildet vorzustellen.

Um zu sehen, in welchem Sinne sich die scheinbare Masse m mit zunehmender Geschwindigkeit v ändert, habe ich die folgende Tabelle I berechnet:

Tabelle I.

Geschwindigkeit v in cm	$a = \frac{v}{V}$	$\frac{m}{m_0}$
$12 \cdot 10^8$	0,04	1,001
$3 \cdot 10^9$	0,1	1,007
10^{10}	0,333 ...	1,069
$2 \cdot 10^{10}$	0,666 ...	1,497
$2{,}7 \cdot 10^{10}$	0,9	2,999
$2{,}97 \cdot 10^{10}$	0,99	11,132
$3 \cdot 10^{10}$	1	∞

Wie man sieht, beginnt die scheinbare Masse des Elektrons erst dann in merklichem Maße zu wachsen, wenn die Geschwindigkeit des Elektrons so groß ist, daß sie die größten Werte, die als möglich oder vorkommend erkannt worden sind, weit übertrifft, und zwar mit Einschluß der für die Himmelskörper geltenden Werte, und mit Ausschluß der Geschwindigkeiten der Elektronen, aus denen die Kathodenstrahlen und die Becquerelstrahlen bestehen.

9. Die Hypothese, nach welcher das von einer in Bewegung befindlichen elektrisierten Kugel erzeugte Feld mit dem von einer punktförmigen und mit derselben Bewegung begabten Ladung herrührenden identisch sein soll, diese

1) Notes on Recent Research in Electricity and Magnetism, S. 21.

Hypothese, auf welcher die oben durchgeführte Untersuchung beruht, besitzt, wie ich bereits sagte, in Wirklichkeit keine sichere Grundlage. Andererseits erscheint es nicht logisch, a priori eine besondere Elektrizitätsverteilung für die Darstellung des Elektrons als des Grundelementes einer jeden elektrischen Ladung anzunehmen. Ich habe deshalb sorgfältig untersuchen wollen, ob man nicht dann, wenn man dem Äther, über dessen Struktur und innere Eigenschaften wir nichts Sicheres wissen, irgendein besonderes Verhalten zuschreibt, zu einer Hypothese von großer Wahrscheinlichkeit gelangen kann, die gestattet, die scheinbare Masse des Elektrons in einwandfreier Weise zu berechnen. Dabei habe ich mich von folgendem Gedankengang leiten lassen.

Die elektrische Kraft, welche von einem in Bewegung befindlichen Elektron an einem gegebenen Punkte hervorgebracht wird, wächst und strebt dem Unendlichen zu, wenn der Abstand des Punktes von dem Elektron gegen Null hin abnimmt. Dasselbe gilt auch für die im Volumelement des Äthers enthaltene Energie an dem betrachteten Punkte, und von dem gewissen Spannungszustande längs der Kraftlinien, der nach der Auffassung von Maxwell das Substrat der scheinbaren elektrischen Fernkräfte bildet. Die Hypothese nun, der ich mich im folgenden bedienen werde, besteht darin, daß ich an der Unmöglichkeit festhalte, daß diese Energie oder dieser Spannungszustand einen gewissen Höchstwert überschreiten können, ohne daß der Äther in seinen Eigenschaften von Grund aus verändert wird. Bezeichnet man mit φ den Grenzwert der elektrischen Kraft F_e, so wird man den Äther in dem ganzen Raum außerhalb einer geschlossenen Oberfläche, welche das Elektron umgibt, und welche der Ort der Punkte ist, in denen die elektrische Kraft den Wert φ hat, in der gewohnten Weise betrachten müssen, während man in dem Raume innerhalb der genannten Oberfläche dem Äther ein abweichendes Verhalten zuschreiben muß.

Hinsichtlich dieses Verhaltens bieten sich der Vorstellung von selbst zwei grundlegende Hypothesen dar. Zunächst kann man sich vorstellen, daß sich der Äther in dem von der erwähnten Oberfläche umschlossenen Gebiete verhält wie ein metallischer Draht, an den man ein Gewicht angehängt hat, durch welches seine Zerreißfestigkeit überschritten wird, und in dem daher keine Spannung längs der Kraftlinien mehr herrscht. Weiter wird man dann für die elektrische Kraft einen Nullwert in diesem ganzen Gebiete annehmen müssen, in dem daher der Äther gewissermaßen als ein Leiter und nicht mehr als ein Dielektrikum anzusehen sein wird.

Zweitens könnte man die Verhältnisse in anderer Weise betrachten, nämlich eine Art Viskosität und dementsprechend eine Art Elastizität des Äthers annehmen und der elektrischen Kraft in dem ganzen an das Elektron angrenzenden Gebiete den Wert φ und nicht den Wert Null zuschreiben. Einstweilen werde ich mich indessen der ersteren Annahme bedienen.

Man kann sich übrigens leicht eine Vorstellung von der Oberfläche bilden, die das Gebiet umschließt, in welchem der Äther verändert wird. Wenn nämlich ϱ die Entfernung zwischen einem Punkte der Oberfläche und dem Elektron ist, so erhält man aus der Formel für F_e (§ 5):

$$\varphi = \frac{e(1-a^2)}{\varrho^2(1-a^2\sin^2\varepsilon)^{3/2}},$$

und dies wird die Gleichung der Oberfläche in den Koordinaten ϱ, ε und α sein. In cartesianischen Koordinaten, bezogen auf Achsen, die zu denen der Figur parallel sind, und auf einen Nullpunkt im Elektron M wird die Gleichung der Oberfläche:

$$\varphi^2[(x^2+y^2)(1-a^2)+z^2]^3 = e^2(1-a^2)^2(x^2+y^2+z^2).$$

Es ist also eine Fläche sechster Ordnung, eine Rotationsfläche um die z-Achse, und die x-y-Ebene ist eine Symmetrieebene der Fläche. Die Meridiankurve, beispielsweise in der x-z-Ebene betrachtet, hat die Gleichung:

$$\varphi^2[x^2(1-a^2)+z^2]^3 = e^2(1-a^2)^2(x^2+z^2)$$

und schneidet die z- und die x-Achse normal in Punkten, deren Abstände ϱ_1 und ϱ_2 von dem Elektron leicht bestimmt werden können. Es wird nämlich ϱ_1 der Wert von z für $x=0$ und ϱ_2 der Wert von x für $z=0$ sein. Es wird also:

$$\varrho_1 = \sqrt{\frac{e(1-a^2)}{\varphi}},$$

$$\varrho_2 = \sqrt{\frac{e}{\varphi\sqrt{1-a^2}}},$$

und somit

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = (1-a^2)^{1/4}.$$

Augenscheinlich ist ϱ_1 der Polarstrahl und ϱ_2 der Äquatorialstrahl der oben betrachteten Fläche.

Für sehr kleines a wird die Oberfläche selbst eine Kugel vom Radius

$$\varrho_0 = \sqrt{\frac{e}{\varphi}},$$

und die Werte für ϱ_1 und ϱ_2 lassen sich dann schreiben als

$$\varrho_1 = \varrho_0\sqrt{1-a^2}$$

und

$$\varrho_2 = \varrho_0\frac{1}{\sqrt[4]{1-a^2}}.$$

Wie man sieht, ist die den veränderten Äther umgrenzende Fläche für sehr kleines a merklich eine Kugel vom Radius ϱ_0, plattet sich aber mit wachsendem a an den Polen mehr und mehr ab, da ihr Polarradius mehr und mehr abnimmt, während der Äquatorialradius immer mehr zunimmt.

Wollte man als Gestalt und Volumen des Elektrons die Gestalt und das Volumen des seiner Elastizität verlustig gegangenen Teiles des Äthers betrachten, so könnte man sich kurz so ausdrücken, daß man, wie oben, sagt, daß das Elektron eine Kugel vom Radius ϱ_0 ist, wenn es unbeweglich ist; merklich eine solche, wenn es eine kleine Geschwindigkeit besitzt, daß es dagegen eine mehr und mehr abgeplattete Gestalt mit einem Polarradius $\varrho_1 < \varrho_0$ und einem Äquatorialradius $\varrho_2 > \varrho_0$ annimmt, wenn seine Geschwindigkeit wächst.

10. Nachdem ich somit die neue Hypothese erklärt habe, die ich an die Stelle der mehrfach erwähnten alten (§ 3) setzen will, gehe ich nunmehr dazu über, die scheinbare Masse m des Elektrons, immer für den Fall der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung, zu berechnen.

Führt man in den Ausdruck für die Gesamtenergie E die üblichen sphärischen Koordinaten ein, und berücksichtigt man die Beziehung

$$F_m = F_e a \sin\varepsilon ,$$

so erhält man:

$$E = \frac{1}{8\pi}\int\int\int F_e^2 (1 - a^2\sin^2\varepsilon)\, r^2\, dr \sin\varepsilon\, d\varepsilon\, d\alpha .$$

Während die Integration nach α und nach ε auch in diesem Falle gerade wie in dem des § 5 von 0 bis 2π bzw. von 0 bis π zu erstrecken ist, muß die Integration nach r sich von einem veränderlichen unteren Grenzwerte bis ins Unendliche erstrecken. Der untere Grenzwert ist nämlich gerade ϱ, das heißt der Wert von r, dem der Grenzwert φ für F_e entspricht. Entsinnen wir uns nun des Ausdruckes für F_e (§ 5), so erhalten wir:

$$\varrho = \sqrt{\frac{e(1-a^2)}{\varphi\,(1-a^2\sin^2\varepsilon)^{3/2}}} ;$$

und da diese Grenze eine Funktion von ε ist, so muß die Integration nach r, die ausführbar sein wird, nachdem man für F_e seinen Wert eingesetzt hat, vor der nach ε erfolgen. Man kann aber auch in anderer Weise vorgehen.

Nachdem man die Integration nach α ausgeführt hat, entnehme man, statt für F_e seinen Wert als Funktion von r und ε einzusetzen, aus der Formel

$$F_e = \frac{e(1-a^2)}{r^2(1-a^2\sin^2\varepsilon)^{3/2}}$$

die Werte für r^2 und dr und setze sie in den obigen Ausdruck für E ein. Auf diese Weise erhält man:

$$E = -\frac{1}{2}e^{3/2}(1-a^2)^{3/2}\int\int\frac{1+a^2\sin^2\varepsilon}{(1-a^2\sin^2\varepsilon)^{3/2}}\,d\varepsilon\cdot\frac{dF_e}{\sqrt{F_e}} .$$

Auf diese Weise hat man die Veränderliche r durch die Veränderliche F_e ersetzt, und für diese sind die Grenzen der Integration, die offenbar φ und 0 sind, Konstanten. Führt man also diese Integration aus, so erhält man:

$$E = \frac{1}{2}E_0(1-a^2)^{3/2}\int_0^{\pi}\frac{(1+a^2\sin^2\varepsilon)\sin\varepsilon}{(1-a^2\sin^2\varepsilon)^{3/2}}\,d\varepsilon ,$$

wo

$$E_0 = \frac{1}{2}e^{3/2}\varphi^{1/2} = \frac{e^2}{2\varrho_0}$$

der Wert von E für $a = 0$ ist.

Die gefundene Gleichung kann man mittels Reihenentwickelung nach Potenzen von a^2 integrieren. Die Berechnung ist ziemlich mühsam und führt zu folgender Formel:

$$E = E_0\left(1+\frac{2}{3}a^2+\frac{11}{40}a^4+\frac{53}{280}a^6+\right.$$
$$\left.+\frac{19}{128}a^8+\cdots\right) .$$

11. Wie oben findet man die elektromagnetische Masse m des Elektrons mit Hilfe der Formel

$$\frac{1}{2}m v^2 = E - E_0 ,$$

das heißt indem man sie als die materielle Masse betrachtet, welche man mit dem Elektron verbunden annehmen müßte, damit dessen lebendige Kraft der Energie gleich wird, die es über seine elektrostatische Energie hinaus noch besitzt. Auf die 2 Weise findet man:

$$m = \frac{2E_0}{V}\left(\frac{2}{3}+\frac{11}{40}a^2+\frac{53}{280}a^4+\frac{19}{128}a^6+\cdots\right) .$$

Wenn man nun, wie früher, mit m_0 die scheinbare Masse für den Fall kleiner Geschwindigkeiten bezeichnet, so findet man für m_0 den gewohnten Wert

$$m_0 = \frac{4E_0}{3V^2} = \frac{2e^2}{3\varrho_0 V^2} .$$

Daraus folgt:

$$\frac{m}{m_0} = 1+\frac{33}{80}a^2+\frac{159}{560}a^4+\frac{57}{256}a^6+\cdots .$$

In der folgenden Tabelle II habe ich die Werte für $\frac{m}{m_0}$ angegeben, die ich nach dieser Formel für nicht zu große Werte von a berechnet habe (dabei ist zunächst von den beiden mit einem Sternchen * bezeichneten Werten abzusehen). Die Tabelle zeigt, daß

man auch mit Hilfe der neuen Hypothese zu dem gewohnten Ergebnis gelangt, daß nämlich die scheinbare Masse des Elektrons mit zunehmendem Werte seiner Geschwindigkeit anfangs langsam wächst, dann sehr schnell, wenn sich a der Einheit nähert, oder wenn sich v dem Werte V nähert.

Tabelle II.

Geschwindigkeit v in cm	$a = \frac{v}{V}$	$\frac{m}{m_0}$	$\varrho_1 : \varrho_0$	$\varrho_0 : \varrho_1$	$\varrho_2 : \varrho_1$
0	0	1	1	1	1
$12 \cdot 10^8$	0,04	1,000001	0,999	1,00004	1,001
$3 \cdot 10^9$	0,1	1,0041	0,995	1,003	1,008
10^{10}	0,33 ...	1,050	0,943	1,030	1,092
$2 \cdot 10^{10}$	0,66 ...	1,259	0,745	1,158	1,554
$2{,}7 \cdot 10^{10}$	0,9	7,376*	0,436	1,515	3,775
$2{,}97 \cdot 10^{10}$	0,99	24,245*	0,141	2,263	18,874
$3 \cdot 10^{10}$	1	∞	0	∞	∞

Die drei letzten Spalten enthalten die Verhältnisse zwischen ϱ_0, ϱ_1 und ϱ_2, und aus ihnen geht hervor, in welchem Maße sich die Begrenzungsfläche des Gebietes, in welchem der Äther keine Elastizität mehr besitzt, mit wachsender Geschwindigkeit abplattet.

In der vorstehenden Tabelle habe ich die Werte von $\frac{m}{m_0}$, welche Geschwindigkeiten von $\frac{9}{10}$ und $\frac{99}{100}$ Lichtgeschwindigkeit entsprechen, nach obiger Formel berechnet, nicht mit aufgeführt. Man muß sich nämlich gegenwärtig halten, daß der Annäherungsgrad, den die mit dem Gliede a^6 abgebrochene Reihe zu liefern imstande ist, in einem derartigen Falle unzureichend ist. Ich habe aber die Werte von $\frac{m}{m_0}$ für ein der Einheit benachbartes a auf einem anderen Wege angenähert bestimmen können.

Mit Hilfe fortgesetzter partieller Integration läßt sich das in dem Ausdruck für E enthaltene Integral, wie sich der Leser überzeugen kann, folgendermaßen umformen [1]):

$$\int \frac{\sin\varepsilon\,(1 + a^2\sin^2\varepsilon)\,d\varepsilon}{(1 - a^2\sin^2\varepsilon)^{9/4}} = -\frac{1}{(1-a^2)^3}\left[\frac{4}{5}(1-a^2)^2 \frac{\cos\varepsilon}{(1 - a^2\sin^2\varepsilon)^{5/4}} + \frac{2}{5}(1-a^2)(1+5a^2) \frac{\cos\varepsilon}{(1 - a^2\sin^2\varepsilon)^{1/4}} + \frac{2}{15}(1+5a^2)\cos\varepsilon\,(1 - a^2\sin^2\varepsilon)^{3/4} + \frac{1}{3}(1+5a^2)\int (1 - a^2\sin^2\varepsilon)^{3/4}\sin\varepsilon\,d\varepsilon\right].$$

1) Für jede dieser partiellen Integrationen benutzt man die Gleichung:

$$\int \frac{\sin\varepsilon\,d\varepsilon}{(1-a^2\sin^2\varepsilon)^{5/4}} = \frac{-\cos\varepsilon}{(1-a^2)\sqrt{1-a^2\sin^2\varepsilon}},$$

und berücksichtigt zu gegebener Zeit die Identität:

$$a^2\cos^2\varepsilon = (1 - a^2\sin^2\varepsilon) - (1 - a^2).$$

Dieses neue Integral enthält nun das Binomen $(1 - a^2\sin^2\varepsilon)$ nicht mehr im Nenner, sondern im Zähler und läßt sich für wenig von der Einheit verschiedenes a berechnen. Setzt man nämlich an Stelle von a^2 die Einheit ein, so wird das genannte Integral:

$$\int (\cos\varepsilon)^{5/2}\sin\varepsilon\,d\varepsilon = -\frac{2}{5}(\cos\varepsilon)^{5/2},$$

und somit:

$$\int_0^{\pi} \frac{(1 + a^2\sin^2\varepsilon)\sin\varepsilon}{(1 - a^2\sin^2\varepsilon)^{9/4}}\,d\varepsilon = \frac{1}{(1-a^2)^3}\left[\frac{8}{5}(1-a^2)^2 + \frac{4}{5}(1-a^2)(1+5a^2)\right].$$

Setzt man diesen Wert in den Wert für E ein, so findet man nach Ausführung der Reduktionen:

$$E = \frac{6}{5}E_0\frac{1+a^2}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Daraus erhält man:

$$m = \frac{2(E-E_0}{a^2V^2} = \frac{2E_0}{V^2}\left(\frac{6}{5}\frac{1+a^2}{a^2\sqrt{1-a^2}} - \frac{1}{a^2}\right),$$

und, wenn man den Wert m_0 der Masse, welche kleinen Geschwindigkeiten entspricht, nämlich

$$m_0 = \frac{4}{3}\frac{E_0}{V^2},$$

einführt:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{9}{5}\frac{1+a^2}{a^2\sqrt{1-a^2}} - \frac{3}{2a^2}.$$

Die beiden in der vorstehenden Tabelle II mit einem Sternchen bezeichneten Werte von $\frac{m}{m_0}$ sind nach dieser Formel berechnet worden. Diese Formel liefert zwar recht angenäherte Werte, wenn sich a wenig von der Einheit unterscheidet, ergibt aber sonst zu hohe Werte, wie leicht einzusehen ist, wenn man das Verfahren betrachtet, nach dem sie erhalten worden ist.

12. Zum Schlusse will ich untersuchen, zu welchen Ergebnissen die zweite der im § 9 vorgetragenen Hypothesen führt. Ich will also annehmen, der Kraft F_e werde in dem Gebiete des veränderten Äthers, welches das Elektron umgibt, der Wert φ statt des Wertes Null beigelegt. Es läßt sich leicht nachweisen, daß die Hauptergebnisse, welche in den beiden Paragraphen 10 und 11 aufgestellt worden sind, ihre Gültigkeit behalten, und daß besonders die Formel, welche den Wert für $\frac{m}{m_0}$ liefert, ungeändert bleibt.

Im vorliegenden Falle muß man zu der Energie E, wie sie die betreffende Formel des § 10 ergibt, die Energie, welche ich mit E

bezeichnen will, hinzufügen, die sich auf den Raum bezieht, in dem die elektrische Kraft den konstanten Wert φ hat. Offenbar wird E' durch die Gleichung

$$E' = \frac{1}{8\pi}\int\int\int F_e^2 (1 + a^2 \sin^2\varepsilon)\, r^2\, dr \sin\varepsilon\, d\varepsilon\, d\alpha$$

gegeben sein, wenn man, nachdem man φ an Stelle von F_e eingesetzt hat, die Integration über die richtigen Grenzen erstreckt, und zwar für α die Grenzen 0 und 2π, für ε die Grenzen 0 und π und für r die Grenzen 0 und $\varrho = \sqrt{\frac{e(1-a^2)}{\varphi(1-a^2\sin^2\varepsilon)^{3/2}}}$ nimmt.

Führt man die Integrationen nach α und r aus, so findet man:

$$E' = \frac{1}{12} e^{3/2}(1-a^2)^{3/2}\sqrt{\varphi}\int_0^{\pi}\frac{(1+a^2\sin^2\varepsilon)\sin\varepsilon}{(1-a^2\sin^2\varepsilon)^{3/2}}\, d\varepsilon,$$

also

$$E' = \frac{1}{3}E.$$

Daraus folgt, daß im vorliegenden Falle die Gesamtenergie ein und ein drittel mal so groß ist wie die Energie im vorhergehenden Falle. Da nun auch dasselbe für die elektrostatische Energie gelten wird, so werden im vorliegenden Falle sowohl m als auch m_0 Werte haben, die ein und ein drittel mal so groß sind wie die im § 10 verzeichneten. Es wird daher der Ausdruck für $\frac{m}{m_0}$ unverändert bleiben.

Statt

$$m_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{\varrho_0 V^3}$$

haben wir also jetzt:

$$m_0 = \frac{8}{9}\frac{e^2}{\varrho_0 V^2},$$

und statt

$$E_0 = \frac{e^2}{2\varrho_0}$$

nunmehr

$$E_0 = \frac{2e}{3\varrho_0}.$$

Diese Verschiedenheit hat keine Bedeutung, insofern als ϱ_0 seiner Größe nach durch die Formeln bestimmt bleibt, in denen es enthalten ist, und nicht mehr die besondere Bedeutung des Halbmessers des Elektrons hat.

Es wäre müßig, die Werte von $\frac{m}{m}$, welche Kaufmann experimentell gefunden hat, mit denen zu vergleichen, welche die obige Formel liefert, weil eben alles, was ich in dieser Arbeit gesagt habe, sich auf das in geradliniger und gleichförmiger Bewegung begriffene Elektron bezieht, während die Elektronen in den Versuchen über die elektrische und magnetische Ablenkung der β-Strahlen des Radiums eine ganz andere Bewegung besitzen, und weil kein Beweis dafür vorliegt, es vielmehr a priori wenig wahrscheinlich ist, daß die scheinbare Masse eines Elektrons unter allen Umständen immer dieselbe sein muß. Man kann sogar beobachten, daß nach den mathematischen Theorien, in welchen a priori für das Elektron ein Volumen und eine Gestalt (Kugel, Ellipsoid usf.) angenommen wird, das Elektron selbst eine transversale Masse zeigt, die von der longitudinalen sehr verschieden ist. Andererseits auch ist es nicht unwahrscheinlich, daß man, wenn man die Ausdrücke für die Kräfte F_e und F_m kennen würde, die denen analog sind, von welchen ich ausgegangen bin, sich aber auf die Bewegung beziehen, welche das Elektron in den Versuchen von Kaufmann tatsächlich besessen hat, dann auch auf Grund der neuen angenommenen Hypothese Ausdrücke für $\frac{m}{m_0}$ finden würde, die von denen, zu welchen ich im § 11 gelangt bin, verschieden sind.

(Aus dem Italienischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 31. Januar 1907.)

Über das Postulat der Relativität.

Von J. Farkas.

In einer früheren Mitteilung (diese Zeitschr. 7, 654—657, 1906) habe ich eine Modifikation der Lorentzschen Grundgleichungen betrachtet, die durch die Annahme eines ergänzenden elektrischen Stromes in Verbindung mit einer Annahme über die Kondensation des Äthers in der Umgebung der Atome bedingt wird. Diesmal beabsichtige ich anzudeuten, wie durch eine andere, überaus einfache Hypothese das Postulat der Relativität in der Elektrodynamik erzielt werden kann, indem der Begriff eines lokalen Koordinatensystems neben dem Begriffe einer zugehörigen lokalen Zeit eingeführt wird.

Zur Zeit t sollen in dem Punkte x, y, z eines im Äther ruhenden Koordinatensystems (K) $w_1, w_2, \ldots$ die Geschwindigkeiten der verschiedenen materiellen Komponenten bedeuten. Sind dann $\mu_1, \mu_2 \ldots$ die betreffenden materiellen Dichtigkeiten, und ist μ_0 die hier sehr klein zu denkende Dichtigkeit des Äthers in dem Punkte x, y, z, so definiere ich für den Punkt x, y, z die Geschwindigkeit

$$w = \frac{\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \ldots}{\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \ldots}; \qquad (1)$$

und betrachte zur Zeit $t + dt$ den Punkt mit den Koordinaten

$$x' = x + w_x dt, \quad y' = y + w_y dt, \quad z' = z + w_z dt$$

des Koordinatensystems (K) und mit der zugehörigen Geschwindigkeit

$$w' = \frac{\mu'_1 w'_1 + \mu'_2 w_2 + \dots}{\mu_0 + \mu'_1 + \mu'_2 + \dots}, \qquad (1)_t$$

wo $w'_1, w'_2 \dots$ die Geschwindigkeiten, $\mu'_1, \mu'_2 \dots$ die Dichtigkeiten der verschiedenen materiellen Komponenten zur Zeit $t + dt$, und μ_0 wiederum die Dichtigkeit des Äthers in dem Punkte x', y', z' vorstellen; ferner betrachte ich zur Zeit $t + 2dt$ den Punkt

$$x'' = x' + w'_x dt, y'' = y' + w'_y dt, z'' = z' + w'_z dt$$

mit der entsprechenden Geschwindigkeit usw. Auf diese Weise ist die Bewegung eines Punktes definiert dem an dem Orte x, y, z, die Geschwindigkeit w und die Beschleunigung erster Ordnung

$$\frac{dw}{dt} = \dot{w} = \frac{w' - w}{dt} \qquad (2)$$

usw. in dem Zeitpunkte t zukommt.

Ich nehme nun für den solchermaßen bewegten Punkt x, y, z ein zweites Koordinatensystem (K') an, dessen Anfangspunkt a, b, c sich zu jeder Zeit in der für x, y, z definierten Bewegung befinden soll, so daß

$$\dot{a} = w_x, \qquad \dot{b} = w_y, \qquad \dot{c} = w_z \qquad (3)$$

sei, wobei die Achsen von (K') mit den Achsen des Koordinatensystems (K) beständig gleiche Richtungen haben sollen. Bedeuten ξ, η, ζ die Koordinaten irgendeines fixen Punktes in (K), und ξ', η', ζ' die Koordinaten desselben Punktes in dem „lokalen" Koordinatensysteme (K'), so hat man

$$\xi = a + \xi', \quad \eta = b + \eta', \quad \zeta = c + \zeta' \qquad (4)$$

und es soll in diesem Koordinatensysteme (K') der Ausdruck

$$t' = t - \frac{w_x \xi + w_y \eta + w_z \zeta}{c^2} \qquad (5)$$

als lokale Zeit gelten, wo w_x, w_y, w_z dieselbe Bedeutung wie in (3) besitzen, d. h. die Komponenten der Geschwindigkeit (1) zur Zeit t in dem Orte x, y, z vorstellen.

Werden daher ξ, η, ζ, t als Funktionen vom ξ', η', ζ', t' aufgefaßt, so hat man nach (4) und (5)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t'} &= w_x \frac{\partial t}{\partial t'}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \xi'} = 1 + w_x \frac{\partial t}{\partial \xi'}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \eta'} = w_x \frac{\partial t}{\partial \eta'}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \zeta'} &= w_z \frac{\partial t}{\partial \xi'}, \text{ usw.} \\ \frac{\partial t}{\partial t'} &= 1 : \left(1 - \frac{w^2}{c^2} - \frac{w_x \xi + w_y \eta + w_z \zeta}{c^2}\right), \\ \frac{\partial t}{\partial \xi'} &= \frac{w_x}{c^2} \frac{\partial t}{\partial t'}, \text{ usw.} \end{aligned}\right| \qquad (6)$$

Für den Punkt

$$(\xi, \eta, \zeta) = (x, y, z), \quad (\xi', \eta', \zeta') = (x', y', z')$$

sollen in dem Koordinatensysteme (K') die Operationen div und rot in diesem Sinne mit div′ und rot′ bezeichnet werden. Gleichfalls sollen alle auf dieses lokale Koordinatensystem bezogenen Größen mittels eines oberen Akzentes bezeichnet werden.

Macht man alsdann die Hypothese, daß die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}' \mathfrak{d}' &= \varrho' & \operatorname{div}' \mathfrak{h}' &= 0 \\ c \operatorname{rot}' \mathfrak{d}' &= -\frac{\partial \mathfrak{h}'}{\partial t'} & c \operatorname{rot}' \mathfrak{h}' &= \frac{\partial \mathfrak{d}'}{\partial t'} + \varrho' v' \end{aligned}\right| \qquad (7)$$

zu jeder Zeit t und in bezug auf einen jeden Punkt x, y, z in dem zugehörigen lokalen Koordinatensysteme (K') und lokalen Zeitpunkte t' als Definitionen der Feldvektoren $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{h}'$ und der elektrischen Kraft

$$\mathfrak{d}' + \frac{1}{c}[v' \mathfrak{h}'] \qquad (8)$$

zu betrachten sind, so hat man das Postulat der Relativität erlangt, ohne dabei gegen das allgemeine Prinzip der Kontinuität zu verstoßen.

Insbesondere ergibt sich für den reinen Äther, d. h. für $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \dots$ und ebenso für ein ruhendes materielles System, d. h. für $w_1 = 0$, $w_2 = 0, \dots$, daß $w = 0$, $t' = t$ ist. Bewegt sich dagegen ein materielles System, unterscheiden sich aber die Geschwindigkeiten w in diesem materiellen Systeme, wie z. B. für unsere Erde, verhältnismäßig wenig von einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit $\zeta \mathfrak{W}$, so kann nach (1) überall, wo $\mu_1 + \mu_2 + \dots$ groß gegen μ_0 ist, $w = \zeta \mathfrak{W}$ gesetzt, und ein und dasselbe Koordinatensystem (K') den Gleichungen (7) zugeordnet werden. Nur die Punkte in den Grenzschichten zwischen der Materie und dem freien Äther machen davon eine allgemeine Ausnahme, indem die Dichtigkeiten $\mu_1, \mu_2, \dots$ gegen die äußersten Ränder dieser Grenzschichten zu allmählich verschwinden, wobei nach (1) die Geschwindigkeit w ebenfalls gegen Null konvergiert. Die relativen Gleichungen (7) gehen aber dabei stetig in die absoluten Gleichungen des Äthers über. Der Zusammenhang mit dem Postulat der Relativität ist leicht zu übersehen, und es zeigt sich auch, daß, wenn man dem Koordinatensysteme (K') die Winkelgeschwindigkeit $\frac{1}{2}$ rot w um den Punkt x', y', z' und dann diesem Punkte die Geschwindigkeit w in bezug auf das Koordinatensystem $(K\xi)$ erteilen würde, man das Postulat auch rotierenden Systemen angepaßt hätte. Dieser Wahl scheint auch keine der bisherigen Erfahrungen im Wege zu stehen.

Schließlich erlaube ich mir noch zu bemerken, daß die Molekulartheorien keine

wesentliche Störung erleiden, wenn wir der Materie in der Weise eine räumliche Stetigkeit zuschreiben, daß die Dichtigkeiten der Atome in solchen Abständen von ihren Massenmittelpunkten, die gegen die Entfernungen benachbarter Massenmittelpunkte groß sind, noch von Null verschieden angenommen werden, und demgemäß ein gegenseitiges Durchdringen der Atome zugelassen wird.

(Eingegangen 10. Februar 1907.)

Lösung des Theoremes von Poincaré-Lorentz mit Hilfe des Greenschen Satzes.

Von Jakob Kunz.

φ und ψ seien innerhalb eines bestimmten Gebietes zwei eindeutige endliche und stetige Funktionen, $d\tau$ ein Volumenelement, ds ein Oberflächenelement der Grenzfläche, n die nach innen genommene Normale von ds, Δ das Zeichen für die Laplacesche Operation, r die Entfernung zwischen einem beliebigen Volumenelement $d\tau$ und einem Punkte im Innern des Integrationsgebietes, in welchem die Funktion φ den Wert φ_0 besitze. Das Theorem von Green läßt sich dann folgendermaßen ausdrücken:

$$4\pi\varphi_0 = \int \Delta\varphi\left(\psi - \frac{1}{r}\right)d\tau - \int \varphi\,\Delta\psi\,d\tau + \int\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\left(\psi - \frac{1}{r}\right) - \varphi\frac{\partial\left(\psi - \frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right]ds.$$

Ich setze $\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r^2}{\Delta\varphi}$ und nehme ferner an, bei dieser Wahl von ψ verschwinde sowohl $\Delta\psi$ als auch das Oberflächenintegral, wenn es über die unendlich ferne Grenzfläche des ganzen Raumes ausgedehnt wird. Unter diesen Voraussetzungen geht die Greensche Gleichung in die folgende über:

$$4\pi\varphi_0 = \int \frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \Delta\varphi\right]d\tau.$$

Führt man in die beiden Grundgleichungen der Elektronentheorie

$$c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\varrho\mathfrak{V} \qquad (1)$$

$$c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} \qquad (2)$$

zwei neue Funktionen $\mathfrak{A}$ und Φ durch die Definitionen

$$\mathfrak{H} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A} \qquad (3)$$

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\Phi \qquad (4)$$

ein, so findet man unter Berücksichtigung der beiden folgenden Grundgleichungen

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{H} = 0$$
$$\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = 4\pi\varrho$$

für die Bestimmung der Funktionen $\mathfrak{A}$ und Φ die folgende Differentialgleichung:

$$\Delta\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\varrho\mathfrak{V}}{c} \qquad (5)$$

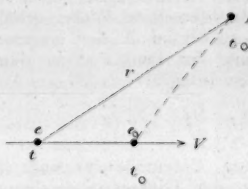
$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -4\pi\varrho. \qquad (6)$$

Gelingt es, diese Gleichungen zu lösen, d. h. $\mathfrak{A}$ und Φ darzustellen als Funktionen der räumlichen Dichte ϱ der elektrischen Ladungen der Elektronen und ihrer Geschwindigkeiten $\mathfrak{V}$, so kann man bei gegebener Lage und Geschwindigkeit eines Elektrons für jeden Punkt des Raumes die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ und die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ bestimmen mit Hilfe der Gleichungen (3) und (4).

Der Gedanke, welcher der Lösung der vorliegenden Differentialgleichungen zugrunde liegt, ist der folgende:

Bewegte Elektronen sind von einem elektromagnetischen Felde begleitet, welches sich mit Lichtgeschwindigkeit von den Elektronen an in den unendlichen Raum ausbreitet.

Soll in einem gegebenen Zeitmomente t^0, in welchem das Elektron sich in e_0 befindet, das Potential desselben in einem Punkte P mit den Koordinaten x, y, z bestimmt werden, so wird es ein bestimmtes Zeitintervall $t_0 - t$



geben, in welchem das Potential der elektromagnetischen Wirkung von e sich nach P ausbreitet und in welchem das Elektron von e nach e_0 wandert. Ist also das Elektron in e_0 angekommen, so besteht in P in demselben Zeitmomente t_0 ein Potential, welches einer früheren Lage e des Elektrons entspricht; das Potential in P ist in bezug auf die gleichzeitige Lage des Elektrons verspätet.

Ist c die Geschwindigkeit des Lichtes, so gilt:

$$r = c(t_0 - t);\quad t = t_0 - \frac{r}{c}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -c.$$

Das im Punkte P erregte Potential Φ der elektrischen Wirkung des Elektrons ist eine

Funktion allein von der Entfernung r, die sich mit der Zeit ändert; daher ist:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t} = -c\frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}.$$

Ebenso ist:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial r^2}.$$

Führen wir diese Ausdrücke in die Gleichungen (5) und (6) ein, so erhalten wir die beiden folgenden Differentialgleichungen:

$$\Delta\Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = -4\pi\varrho$$

$$\Delta\mathfrak{A} - \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial r^2} = -\frac{4\pi\varrho\mathfrak{B}}{c}.$$

Jetzt ersetze ich in der Greenschen Gleichung

$$4\pi\varphi_0 = \int \frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \Delta\varphi\right] d\tau$$

die allgemeine Funktion φ durch Φ und erhalte:

$$4\pi\Phi_{t_0} = \int \frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \Delta\Phi\right] d\tau = \int \left[\frac{4\pi\varrho}{r}\right]_{t=t_0-\frac{r}{c}} d\tau$$

$$\Phi_{t_0} = \int \left[\frac{\varrho}{r}\right]_{t=t_0-\frac{r}{c}} d\tau. \qquad (7)$$

Φ hat die Form eines gewöhnlichen Potentials, diese Funktion wird daher als verzögertes skalares Potential der elektromagnetischen Wirkung bezeichnet. In derselben Weise erhält man für das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ der elektromagnetischen Wirkung im Punkte P in dem Zeitmomente t_0 das Integral

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int \left[\frac{\varrho\mathfrak{B}}{r}\right]_{t=t_0-\frac{r}{c}} d\tau. \qquad (8)$$

Die verzögerten Potentiale (7) und (8) sind die Lösungen der Differentialgleichungen (5) und (6).

Es bleibt jetzt nur noch der Nachweis übrig, daß

$$\Delta\psi = \Delta\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\Big/\Delta\Phi$$

und

$$\int \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\Big/\Delta\Phi - 1\right) - \Phi\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\Big/\Delta\Phi - 1\right)\right)}{\partial n}\right] ds$$

verschwinden.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\Big/\Delta\Phi = 1 + \frac{4\pi\varrho}{\Delta\Phi}$$

$$\Delta\psi = \Delta\frac{1}{r} + \Delta\left(\frac{1}{r}\frac{4\pi\varrho}{\Delta\Phi}\right)$$

$$\Delta\psi = \Delta\frac{1}{r} + \frac{4\pi\varrho}{\Delta\Phi}\Delta\frac{1}{r} + \frac{4\pi\varrho}{r}\Delta\frac{1}{\Delta\Phi}$$

$\Delta\frac{1}{r} = 0$, daher verschwinden die beiden ersten Terme der rechten Seite der letzten Gleichung. Bei der Auswertung des dritten Termes aber bleibt r konstant, daher geht $\Delta\Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = -4\pi\varrho$ über in

$$\Delta\Phi = -4\varrho\pi$$

also ist

$$\Delta\frac{1}{\Delta\Phi} = -\Delta\frac{1}{4\pi\varrho}$$

Die elektrischen Ladungen ϱ pro Volumeneinheit der Elektronen besitzen aber die Koordinaten

$$x_1, y_1, z_1, \quad x_2, y_2, z_2 \ldots\ldots,$$

daher ist

$$\Delta\frac{1}{4\pi\varrho} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{4\pi\varrho}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{4\pi\varrho}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{4\pi\varrho}\right) = 0.$$

Es ist somit in der Tat $\Delta\psi = 0$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\Big/\Delta\Phi - 1 = \frac{4\pi\varrho}{\Delta\Phi}.$$

Daher geht das Oberflächenintegral in die folgende Form über:

$$\int \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n}\frac{1}{r}\frac{4\pi\varrho}{\Delta\Phi} - \Phi\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\frac{4\pi\varrho}{\Delta\Phi}\right)}{\partial n}\right] ds.$$

Wir wenden das Greensche Theorem auf den ganzen unendlichen Raum an. Dementsprechend werde dieses letzte Integral ausgedehnt über die Oberfläche einer Kugel mit einem ins Unendliche wachsenden Radius. In einem beliebigen Punkte der Kugeloberfläche ist $\Delta\Phi = -4\pi\varrho$. Das Oberflächenintegral wird daher dargestellt durch

$$\int\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{1}{r} - \frac{\Phi}{r^2}\right) ds.$$

$\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ nimmt ab mit dem Quadrate des Radius r, Φ mit dem Radius r, $ds = d\omega\, r^2$ nimmt zu mit dem Quadrate des Radius

$$-\int\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\cdot\frac{1}{r} + \frac{\Phi}{r^2}\right) r^2\, d\omega$$

wird also gleich $-\int C\frac{d\omega}{r}$, ein Ausdruck, der mit unendlich werdendem Radius verschwindet.

(Eingegangen 13. Februar 1907.)

Elektrischer Widerstand von Legierungen.

Von R. S. Willows.[1])

Die Versuche von Fleming und Dewar[2]) und von anderen Forschern haben deutlich gezeigt, welch weitgehende Verschiedenheiten bestehen zwischen den elektrischen Eigenschaften der Legierungen einerseits und denen der reinen Metalle, aus denen diese Legierungen sich zusammensetzen, andererseits. Die wohlbekannten Untersuchungen von Matthiessen zeigen, daß der Widerstand von Legierungen, die nur zwei der Metalle Blei, Zinn, Kadmium oder Zink, und sonst keine weiteren Bestandteile enthalten, aus den Widerständen ihrer Bestandteile berechnet werden kann, wenn die Mengenverhältnisse bekannt sind, in denen die einzelnen Metalle vorhanden sind. Der spezifische Widerstand aller übrigen Legierungen ist größer, als er sich aus einer Rechnung ergeben würde, die auf der Annahme beruhte, daß die Bestandteile proportional zu dem Volumen leiten, mit welchem jeder von ihnen vertreten ist. So entsteht die überraschende Tatsache, daß der Zusatz von reinem Silber (einem guten Leiter) zu Gold (einem schlechteren Leiter) die Leitfähigkeit des letzteren noch herabsetzt. Fleming und Dewar haben ferner gezeigt, daß der Widerstand reiner Metalle sehr stark herabgeht, wenn man sich dem absoluten Nullpunkt nähert, während Legierungen dann noch einen großen Teil ihres Widerstandes beibehalten.

Lord Rayleigh[3]) hat eine Theorie aufgestellt, welche diese Verschiedenheiten erklären soll. Diese Theorie gründet sich auf die thermoelektrischen Eigenschaften eines Gemisches aus zwei Metallen. Liebenow[4]) hat in verschiedenen deutschen Veröffentlichungen, aber später, eine Theorie aufgestellt, welche vom physikalischen Standpunkte aus mit der von Rayleigh identisch ist. (Ich möchte erwähnen, daß die Theorie in deutschen Veröffentlichungen stets als die Liebenowsche zitiert wird; die Arbeit von Lord Rayleigh scheint unbeachtet geblieben zu sein.)

Die Theorie ist folgende: Wenn Elektrizität von einem Metall zu einem anderen fließt, so findet an der Verbindungsstelle eine Absorption oder eine Entwicklung von Wärme statt, — der Peltier-Effekt. Die hierdurch verursachte Störung des Temperaturgleichgewichtes nimmt zu, bis die Wärmeleitung durch die Metalle dem Peltier-Effekt an den Berührungsstellen das Gleichgewicht hält, und sie läßt ihrerseits eine elektromotorische Gegenkraft auftreten. Die Temperaturdifferenz zwischen den aufeinanderfolgenden Verbindungsstellen ist der Stromstärke proportional; das gleiche gilt auch für die elektromotorische Gegenkraft, die auf den Plan gerufen wird. Nun kann man aber eine elektromotorische Gegenkraft, die der Stromstärke proportional ist, experimentell nicht von einem Widerstand unterscheiden, infolgedessen würde eine Legierung aus diesen Gründen einen scheinbaren Widerstand besitzen, der dem Wesen nach von dem Widerstand eines reinen Metalles verschieden ist. Rayleighs Berechnung zeigt, daß der falsche Widerstand R, für die Längeneinheit berechnet, durch die Gleichung

$$R = 273\, e^2 / (\varkappa_{(p)} + \varkappa'_{(p')})$$

gegeben wird. Hier bezeichnet e die thermoelektrische Kraft eines Thermoelements bei 1^0 Temperaturdifferenz zwischen seinen Verbindungsstellen; $\varkappa$ und $\varkappa'$ bezeichnen die Wärmeleitfähigkeiten der Metalle in Erg, und p und p' sind die Volumenverhältnisse, nach denen die beiden Metalle vorhanden sind. Es ist dabei angenommen worden, daß die Temperatur in der Nachbarschaft von 0^0 C liege.

Man wird bemerken, daß die Anzahl n der auf die Längeneinheit entfallenden thermoelektrischen Elemente in die vorstehende Gleichung nicht eingeht. Die Anzahl der mitwirkenden Elemente wird zwar durch feinere Unterteilung vergrößert, aber der Wirkungsgrad jedes einzelnen Elements wird dabei herabgesetzt, und zwar infolge der leichteren Wärmeleitung zwischen seinen Verbindungsstellen. Eine Legierung aus gleichen Volumteilen Kupfer und Eisen würde einen falschen Widerstand haben, der sich auf 1,5 vom Hundert des Kupferwiderstandes belaufen würde; das sieht man sofort, wenn man in die vorstehende Formel die entsprechenden Werte einsetzt.

Wie nebenher bemerkt werden mag, zeigt diese Gleichung, daß es immer möglich ist, die Mengenverhältnisse der vorkommenden Metalle so zu wählen, daß die entstehende Legierung einen größten Widerstand haben wird. Es ist nämlich

$$p + p' = 1,$$

also:

$$R = \frac{273\, e^2}{\frac{\varkappa}{p} + \frac{\varkappa'}{1-p}};$$

für ein Maximum oder Minimum von R wird nun:

$$\frac{dR}{dp} = 0;$$

daraus ergibt sich:

$$\frac{\varkappa}{p^2} - \frac{\varkappa'}{(1-p)^2} = 0,$$

1) Vortrag, gehalten in der Physical Society of London am 23. November 1906.
2) Phil. Mag. (5) **36**, 271, 1893.
3) Scientific Papers, **4**, 232.
4) Enzyklopädie der Elektrochemie, 10.

oder:

$$p = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x'}{x}}}.$$

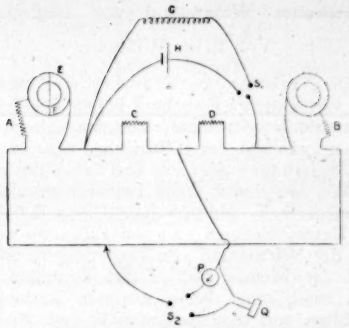
Hier ist die Wurzel mit dem positiven Vorzeichen zu versehen; das entgegengesetzte Vorzeichen würde nämlich zur Folge haben, daß p außerhalb der Grenzen 0 und 1 fallen würde. Man sieht leicht ein, daß der gefundene Wert für p einem Höchstwert für R entspricht.

Es schien nun auf zwei Wegen möglich, diesen falschen Widerstand nachzuweisen; von diesen Wegen ist der eine ein direkter, der andere nicht. Erst als ich bereits eine beträchtliche Zeitlang an der Arbeit war, erhielt ich Kenntnis von der Liebenowschen Arbeit, die sich ausschließlich mit der indirekten Methode befaßt.

Die vorliegende Arbeit bildet eine Beschreibung der Versuche, welche ich gemacht habe, um auf direktem Wege den wahren und den falschen Widerstand voneinander zu trennen. Wir wollen annehmen, ein Strom fließe durche eine Legierung und erzeuge in ihr eine elektromotorische Gegenkraft. Wenn wir nun die Stromrichtung schnell umkehren, so wird diese elektromotorische Gegenkraft anfänglich den Stromdurchgang unterstützen, und es wird mehr Strom in der zweiten Richtung fließen als in der ersten, oder, was auf dasselbe hinausläuft, es wird scheinen, als sei der Widerstand für den schnell umgekehrten Strom kleiner als für den stetigen Gleichstrom. Die Temperatur der Verbindungsstellen wird sich wegen ihres geringen Abstandes voneinander sehr schnell ausgleichen, und es müssen deshalb die Umkehrungen der Stromrichtung sehr schnell erfolgen. Ich habe aus diesem Grunde einen Wechselstrom benutzt.

Die zu untersuchende Legierung bildete einen der Zweige einer Wheatstoneschen Brückenschaltung, und der anliegende Zweig bestand aus einem einfachen Metall, wie Kupfer oder Blei, gewöhnlich aus letzterem, des größeren spezifischen Widerstandes wegen. Die Widerstände wurden zunächst für Wechselstrom abgeglichen und darauf für Gleichstrom. Das reine Metall besitzt keinen falschen Widerstand, und somit mußte bei Anwendung des Wechselstromes der scheinbare Widerstand der Legierung abnehmen.

Die nebenstehende Figur gibt die Anordnung meiner Apparatur wieder.



A ist die Widerstandsrolle aus der Legierung; B der Widerstand aus Kupfer oder Blei, der aus besonders gereinigtem, von der Firma Johnson and Matthey bezogenem Material hergestellt ist; C und D sind zwei Spulen aus Manganin- oder „Eureka"-Draht, die beide auf denselben Kern aufgewickelt sind; G ist die Sekundärspule eines kleinen Induktors; H ist ein Leclanché-Element; P ein Galvanometer; Q ein besonders für Messungen in der Brückenschaltung hergestelltes Telephon oder ein Vibrationsgalvanometer; S_1 und S_2 sind Stromschlüssel aus Quecksilber und Paraffin, durch die die Stromquelle oder der Detektor vertauscht werden können.

Neben dem falschen Widerstand der Legierung muß der Oberflächeneffekt in Rechnung gezogen werden, der aus der Konzentration des Stromes in den äußeren Schichten entspringt. Wenn R der wahre Widerstand eines Drahtes von der Länge l gegen Gleichstrom ist, so ist sein Widerstand gegen Ströme von mäßiger Wechselzahl und einfacher periodischer Form:

$$R' = R\left(1 + \frac{1}{12}\frac{\mu^2 p^2 l^2}{R^2}\right),$$

wo μ die Permeabilität und $p = 2\pi \cdot$ Wechselzahl ist. Die Wellenform des benutzten Stromes war nicht bekannt, aber das zweite Glied in der Klammer wurde durch Verwendung von Drähten mit kleinem Durchmesser klein gemacht. Wäre irgendwelcher Oberflächeneffekt vorhanden, so würde das Experiment nur den Unterschied zwischen dem im Blei und dem in der Legierung auftretenden ergeben.

Für eine und dieselbe Frequenz hängt der Wert dieses Gliedes von l/R ab, und dieses Verhältnis ist am größten für das reine Metall; es würde daher der Oberflächeneffekt, wenn $\mu = 1$ wird, scheinbar den Widerstand der Legierung herabsetzen im Vergleich gegen Kupfer oder Blei als Normale.

Sämtliche Spulen in der Brückenschaltung waren aus 0,33 mm starkem Drahte hergestellt und in der Weise gewickelt, wie es Chaperon angibt: zunächst wurde eine bestimmte Anzahl Windungen rechts herum aufgewickelt und darauf eine gleiche Anzahl in der entgegengesetzten Richtung. Der Widerstand jeder

Spule betrug angenähert 3 Ohm. Durch diese Methode wurde die Induktion in den Brückenzweigen sehr klein gemacht, doch war sie bei diesen niedrigen Widerständen immerhin noch groß genug, um im Telephon ein flaches Minimum zu ergeben. Mit einem gewöhnlichen Satz von Widerstandsspulen aus einem Rheostaten war es unmöglich, eine Abgleichung zu erhalten. Um das Minimum schärfer zu machen, wandte ich die Methode von Rayleigh[1]) an. *E* ist ein hölzerner Ring von 4 Zoll Durchmesser; *F* ein solcher von 2 Zoll Durchmesser; der kleinere dieser beiden Ringe kann um einen gemeinsamen Durchmesser beider Ringe gedreht werden. Jeder Ring trägt drei Windungen aus 0,33 mm starkem Kupferdraht; diese beiden Spulen sind miteinander in Reihe geschaltet, und diese ganze Anordnung wiederum ist mit *A* in Reihe geschaltet. Durch Drehen der Spule *F* kann die Induktion in diesem Zweige innerhalb enger Grenzen verändert werden. Ein ähnliches Spulenpaar ist mit *B* in Reihe geschaltet. Mit diesem Hilfsmittel konnte die Einstellung auf Stromlosigkeit der Brücke bei Anwendung von Wechselstrom leicht bis auf 1 mm genau auf dem Gleitdraht gefunden werden, im allgemeinen sogar in noch engeren Grenzen. Da nun der Widerstand von 1 mm des Gleitdrahtes 0,0006 Ohm betrug, so entspricht diese Einstellung mindestens einer Genauigkeit von etwa 0,02 vom Hundert.

Ich habe verschiedene Stromunterbrecher benutzt. Bei den Vorversuchen habe ich ein Secohmmeter und das Galvanometer probiert, aber bald wieder verlassen, weil Thermoströme zu Störungen Anlaß gaben, und weil ich auch einen weiteren Bereich für die Wechselzahl zu erhalten wünschte. Schließlich benutzte ich bei den Versuchen mit niedriger Wechselzahl einen Saitenunterbrecher mit Quecksilberkontakt. Dieser unterbrach den Primärkreis eines kleinen Induktors, dessen Sekundärspule mit der Brücke verbunden war, und besaß den Vorteil, daß er leicht auf gleiche Schwingungszahl mit dem als Detektor benutzten Vibrationsgalvanometer abgestimmt werden konnte. Für die meisten anderen Beobachtungen wurde ein Radunterbrecher benutzt. Dieser wurde in der Weise hergestellt, daß in den Radkranz einer Scheibe aus Buchenholz von 1 *engl. Fuss* im Durchmesser ungefähr 120 Messingstücke eingelassen wurden, deren Breite längs des Kranzes ungefähr $^1/_{10}$ Zoll betrug; das Ganze wurde sorgfältig abgedreht. An den Radkranz drückten zwei Federn, welche den Stromkreis durch die Messingstücke schlossen, wenn sich das Rad, durch einen Motor angetrieben, drehte. Ein kleiner Kondensator wurde mit den Federn verbunden, um den Übergang von Funken zu verhindern.

Die Brücke wurde zunächst mit Wechselstrombetrieb auf Stromlosigkeit eingestellt, und zwar durch Verschieben des Gleitkontaktes und durch Einstellung der Spulen *E* und *F*, bis die Induktionen wie die Widerstände der Zweige gleich waren; darauf erfolgte die Einstellung mit Gleichstrom. Die Spulen *A* und *B* wurden dann gewöhnlich miteinander vertauscht und die Beobachtungen wiederholt. Herr F. G. Bratt hat mich tatkräftig dadurch unterstützt, daß er abwechselnd mit mir die Ablesungen vorgenommen hat.

Die untersuchten Legierungen waren: Eureka, Messing, Platinoid, Neusilber, Platin-Iridium und Platin-Silber. Die Wechselzahl des Stromes variierte zwischen 10 und 980 in der Sekunde.

Bei den Temperaturen 20° C und 100° C konnte ich keine sicheren Unterschiede zwischen dem Widerstand einer Legierung gegen Gleichstrom und gegen Wechselstrom entdecken.

Wie ich bereits erwähnt habe, fanden Fleming und Dewar, daß der Widerstand eines reinen Metalles bei tiefen Temperaturen sehr klein war, während der Widerstand von Legierungen sich nicht stark änderte. Es schien daher möglich, daß mit einer Erniedrigung der Temperatur der wahre Widerstand einer Legierung abnehmen und der falsche Widerstand verhältnismäßig groß werden könnte. Ich stellte deshalb mit Legierungen Versuche an, die den vorstehend beschriebenen ähnlich waren, und zwar bei der Temperatur der festen Kohlensäure und bei der Temperatur der flüssigen Luft; in keinem Falle konnte ich indessen irgendwie einen falschen Widerstand finden.

Weitere Versuche mit einer Spule von 20 Ohm aus Neusilberdraht, die ich gegen eine Bleidrahtspule verglich, lieferten ähnlich negative Ergebnisse. Ob dies daher rührt, daß die Wechselzahl zu niedrig war, um den Temperaturausgleich zwischen den Berührungsstellen zu überholen, wird vielleicht durch weitere Versuche, die ich in Zukunft auszuführen hoffe, entschieden werden.

Die Versuche von Hagen und Rubens[1]) über das Reflexions- und Absorptionsvermögen von Metallen für ultrarote Strahlen versagen hier. Sie zeigen, daß man die elektrische Leitfähigkeit durch Messung des Reflexions- oder Emissionsvermögens bis auf wenige Prozent finden kann. Die Legierungen nehmen keine Sonderstellung ein. Die Versuche legen die magnetischen Eigenschaften von Nickel und Eisen nicht klar.

Auf jeden Fall fehlt es nicht an indirekten

1) Phil. Mag., Dezember 1886.

1) Ann. d. Phys. (4) 11, 873, 1903.

Beweisen zugunsten der Theorie von Rayleigh. Liebenow teilt die Ergebnisse seiner Rechnung in einer Form mit, die zwei Konstanten enthält, und er nennt diese Konstanten das innere molekulare Wärmeleitvermögen der Metalle. Legt man diesen Konstanten geeignete Werte bei, so gibt die Formel, wenn man sie auf die Messungen von Matthiessen, Feußner, Haas u. a. anwendet, die Beziehung zwischen Widerstand und Zusammensetzung gut, in einigen Fällen, wie für Gold und Silber, sogar ausgezeichnet wieder. Diese Ergebnisse sind indessen keineswegs überzeugend. Die Wärmeleitfähigkeiten, die man den verschiedenen Molekülen zuschreiben muß, scheinen in keinerlei Zusammenhang mit den gewöhnlich an der Masse bestimmten Wärmeleitfähigkeiten zu stehen. Nimmt man beispielsweise das Wärmeleitvermögen des Kupfers als Einheit an, so muß man das des Silbers zu 2,3 und das des Goldes zu 2 annehmen, während Kupfer-Zink den Wert 3 zuerteilt erhalten muß.

Ich möchte noch darauf hinweisen, daß Nickel ein häufiger Bestandteil der allgemein gebräuchlichen Legierungen mit hohem Widerstande ist. Nickel ist aber ein Metall, in welchem der Peltier-Effekt und andere thermoelektrische Eigenschaften stark ausgeprägt sind.

Zum Schlusse habe ich dem Government Grant Committee of the Royal Society für die Beihilfe zur Bestreitung der Kosten dieser Untersuchung zu danken.

Cass Institute, London, E. C.

(Aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 4. Februar 1907.)

Über eine höchst empfindliche Methode zur Untersuchung von Inhomogenitäten im magnetischen Feld.

Ein neuer Galvanometertypus.

Von Fr. Bidlingmaier.

Beim Studium der Fehlerquellen meines Doppelkompasses, eines neuen Instruments zur Bestimmung der Horizontalintensität auf See, das sich auf zwei mehrwöchentlichen Nordseefahrten vorzüglich bewährt hat, fand ich folgende Methode von überraschender Feinheit, die sich besonders für das Studium kleinster lokaler Störungen im homogenen erdmagnetischen Feld (z. B. Helmholtz-Rowlandscher Versuch) zu eignen scheint.

Wir denken uns zunächst im homogenen magnetischen Feld 2 Magnete mit dem Moment M bezw. M', je um eine vertikale Achse durch ihr Zentrum C bezw. C' frei drehbar, so aufgehängt, daß ihre beiden Zentren genau

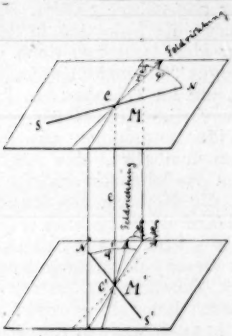


Fig 1.

vertikal übereinander liegen. Dabei wird M um den Winkel φ nach der einen, M' um den Winkel φ' nach der anderen Seite abgelenkt, und die Gesamtspreizung beider Magnete $\psi = \varphi + \varphi'$ gibt ein bequemes relatives Maß für die Horizontalintensität. Die beiden Gleichgewichtsbedingungen für M und M' lauten

$$H \sin \varphi = KM' \sin \psi$$
$$H \sin \varphi' = KM \sin \psi.$$

Dabei ist K ein von der Entfernung e beider Zentren und von der Verteilung der Magnetismen in beiden Magneten abhängiges Glied, das, wenn man mit x den Abstand des magnetischen Teilchens dm im Magneten M von C, $\int x^n dm$ mit M_n bezeichnet und für M' analoge Bezeichnungen anwendet (Lamont), folgendermaßen lautet:

$$e^3 \cdot K = 1 - \frac{3}{2e^2}\left(\frac{M_3}{M} + \frac{M_3'}{M'}\right) + \frac{15}{8e^4}\left\{\frac{M_5}{M} + \frac{M_5'}{M'} + 2\frac{M_3}{M}\frac{M_3'}{M'}(1 + 2\cos^2\psi)\right\} \text{ etc.}$$

Durch Summation der beiden obigen Gleichungen ergibt sich

$$H \cos {}^1/_2(\varphi - \varphi') = K(M + M') \cos {}^1/_2\psi.$$

Namentlich wenn man M so gleich wie möglich mit M' wählt, eignet sich der Winkel ψ allein als Maß für H; dann läßt sich nämlich der Ausdruck $\cos {}^1/_2(\varphi - \varphi')$ leicht zu einem nur von ψ abhängigen Korrektionsglied herabdrücken und wir erhalten:

$$H = K(M + M') \cos {}^1/_2\psi \cdot \text{Corr},$$
$$\text{wo } \text{Corr} = \left(1 + {}^1/_2\left(\frac{M - M'}{M + M'}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2}\right). \qquad (1)$$

Will man insbesondere durch die Veränderungen von ψ die Veränderungen von H studieren, so ergibt sich leicht folgender Zusammenhang zwischen den ΔH und $\Delta\psi$:

$$\frac{\Delta H}{H} = -\,{}^1/_2 \operatorname{tg} {}^1/_2\psi \, \Delta\psi, \qquad (2)$$

wofern man den Unterschied der Magnete vernachlässigt.

Soweit ist die Methode schon längst bekannt. Schon vor etwa 50 Jahren hat sie ein englischer Kapitän W. Walker praktisch angewandt, allerdings mit ganz falschen theoretischen Vorstellungen. Dadurch angeregt, beschäftigten sich theoretisch und praktisch mit ihr der französische Marineoffizier E. Dubois und der holländische Professor Stamkart, auf dessen Untersuchungen ich selbst weitergebaut habe. Unabhängig von den Erstgenannten fand [1]) Heydweiller 1898 wiederum die Methode und verwandte sie zur Untersuchung von Intensitätsvariationen. Er nimmt dabei den Winkel ψ zu 90 Grad, während aus der obigen Formel hervorgeht, daß die Methode viel empfindlicher, das zu einem ΔH gehörige $\Delta\psi$ viel größer wird, wenn man ψ möglichst klein wählt, so klein, als es die Sicherheit der Einstellung bei der angewandten Aufhängungsmethode gestattet.

Neu und eigenartig werden die Verhältnisse, wenn man das oben beschriebene System der beiden Magnete als Prüfungskörper in ein inhomogenes magnetisches Feld einführt.

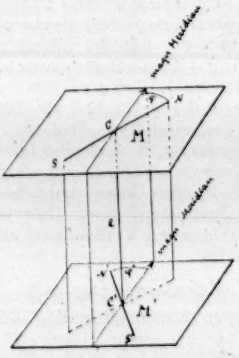


Fig. 2.

Der Einfachheit halber vernachlässigen wir, wo es angeht, den Unterschied beider Magnete; dann haben wir zunächst im ungestörten Feld nach Gleichung (1):

$$H_0 = K(M + M') \cos {}^1/_2\psi_0. \qquad (3)$$

Nun ändere sich das Feld aus irgendeinem Grunde so, daß sich die Richtung der Kraftlinien an Stelle des oberen und des unteren Magneten um δ Grad, die Intensität um h Einheiten unterscheide. H sei die mittlere Intensität; δ und $h : H$ seien kleine Größen von derselben Ordnung.

Die bisherige Spreizung ψ_0 der beiden Magnete vergrößert sich zu ψ_1, wenn jeder Magnet nach derselben Seite wie sein eigenes Feld abgelenkt wird (s. Fig. 2), und wenn wir φ und φ' von der Symmetrieebene der beiden neuen Feldrichtungen aus rechnen, haben wir die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned}(H + {}^1/_2 h) \sin(\varphi - {}^1/_2\delta) &= KM' \sin\psi_1 \\ (H - {}^1/_2 h) \sin(\varphi' - {}^1/_2\delta) &= KM \sin\psi_1.\end{aligned} \qquad (4)$$

Addieren wir unter Vernachlässigung der Glieder mit $h\delta$ und δ^2, so ergibt sich

$$2H \sin {}^1/_2\psi_1 \cos {}^1/_2(\varphi - \varphi') + h \cos {}^1/_2\psi_1 \sin {}^1/_2(\varphi - \varphi') - H\delta \cos {}^1/_2\psi_1 \cos {}^1/_2(\varphi - \varphi') = 2K(M + M') \sin\psi_1. \qquad (5)$$

Nun können wir durch Subtraktion der beiden Gleichungen 4 leicht zeigen, daß die Differenz $\varphi - \varphi'$ von derselben Größenordnung wie δ ist. Da wir also in Gleichung 5 die Glieder 2. Ordnung vernachlässigen wollen, fällt das Glied mit h weg und wir haben somit den Satz:

Führt man das oben beschriebene System von 2 Magneten als Prüfungskörper in ein inhomogenes Feld ein, wo die Differenz der beiden Feldrichtungen und die relative Differenz der beiden Intensitäten an der Stelle des oberen und des unteren Magneten kleine Größen von derselben Ordnung sind, so rührt die Änderung der Spreizung beider Magnete vor und nach dem Auftreten der Feldänderung in erster Linie von der Änderung der beiden Feldrichtungen her.

Durch volle Vernachlässigung aller Glieder 2. Ordnung vereinfacht sich also Gleichung (5) zu $2H \sin {}^1/_2\psi_1 - H\delta \cos {}^1/_2\psi_1 = K(M + M') \sin\psi_1$ und sofern die mittlere Intensität H mit der ungestörten H_0 vertauscht werden darf, ergibt sich unter Anwendung von Gleichung 3

$$\cos {}^1/_2\psi_0 - \cos {}^1/_2\psi_1 = \frac{\delta}{2} \frac{\cos {}^1/_2\psi_0}{\operatorname{tg} {}^1/_2\psi_1}.$$

Schlagen wir nun die Magnete um, so daß sie sich nach der entgegengesetzten Seite ablenken, während das Feld gleichbleibt, so entsteht eine neue Spreizung ψ_2, die kleiner ist, als die Spreizung ψ_0 im ungestörten Feld, und der Zusammenhang mit δ ergibt sich, wenn wir in der letzten Gleichung das Vorzeichen von δ, sowie ψ_1 mit ψ_2 vertauschen. Demnach ist

$$\cos {}^1/_2\psi_2 - \cos {}^1/_2\psi_0 = \frac{\delta}{2} \frac{\cos {}^1/_2\psi_0}{\operatorname{tg} {}^1/_2\psi_2}.$$

Die Addition der beiden letzten Gleichungen ergibt

$$\sin {}^1/_4(\psi_1 - \psi_2) = \frac{\delta}{2} \frac{\cos {}^1/_2\psi_0 \cos {}^1/_4(\psi_1 + \psi_2)}{\sin {}^1/_2\psi_1 \sin {}^1/_2\psi_2},$$

der Faktor von δ enthält im Zähler den Ausdruck $\cos {}^1/_4(\psi_1 + \psi_2)$, der um ein Glied von der Ordnung von δ^2 verkleinert $= \cos {}^1/_2\psi_0$, im Nenner den Ausdruck $\sin {}^1/_2\psi_1 \sin {}^1/_2\psi_2$, der um

1) Wied. Ann. **64**, 1898.

ein Glied von derselben Ordnung vergrößert $= \sin^2 {}^1/_2 \psi_0$ ist. Wir können also, wenn wir noch auf der linken Seite den Winkel mit dem sin vertauschen, in 1. Annäherung schreiben

$$\psi_1 - \psi_2 = \frac{2\delta}{\operatorname{tg}^2 {}^1/_2 \psi_0}. \qquad (6)$$

Die Formel gibt einen sehr anschaulichen Zusammenhang zwischen der Änderung der Kraftlinienrichtung δ und der Spreizungsänderung beider Magnete. Sie zeigt, daß unser Magnetsystem durch geeignete Wahl der Anfangsspreizung es ermöglicht, irgendeine kleine lokale Kraftlinienverschiedenheit im magnetischen Feld in einer fast beliebigen Vergrößerung zur Erscheinung zu bringen.

Wenn diese Störung z. B. durch einen sehr schwachen elektrischen Strom verursacht wird, der je in einer Spule den oberen Magneten in der einen, den unteren in der anderen Richtung umläuft, so stellt diese Einrichtung einen neuen Galvanometertypus von höchster Empfindlichkeit dar.

Beispiele. 1. Durch die Umstände gezwungen, baute ich an Bord des deutschen Forschungsdampfers „Poseidon" mein Instrument ziemlich direkt über dem schweren eisernen Rudergeschirr auf der Brücke auf. Im Instrument hängen 2 Kompaßrosen senkrecht übereinander mit beliebig zwischen 8 und 20 cm wählbarem Abstand. Im Hafen von Mandal (Norwegen) beobachtete ich bei ruhig liegendem Schiff unter anderem auch bei der Entfernung von 19 cm; vor dem Umlegen der Rosen betrug ihre Spreizung 35,3 Grad, nach dem Umlegen 23,8 Grad. Lange bemühte ich mich, diese und andere Differenzen zu erklären; alle irgendwie möglichen Fehlerquellen reichten bei weitem nicht hin, so große Differenzen zu erklären. Als ich mich des Rudergeschirrs erinnerte und eine verschiedene Beeinflussung der oberen und unteren Rose annahm, ergab die Rechnung, daß zur Erklärung jener Differenz von 11,5 Grad eine Abweichung der Kraftlinien an der Stelle der oberen und der unteren Rose von etwa 24 Minuten genügt. Damit hatte ich mit einem Schlag einen vollständigen Einblick in diese und eine Menge anderer Beobachtungen an Bord gewonnen.

2. Will man z. B. irgendeine lokal auftretende Ablenkung der Kraftlinien von einer Minute beobachten, so braucht man nach bisherigem Verfahren, wo man nur mit 1 Magneten beobachtet, schon eine ziemlich feine Einrichtung, um dieselbe mit Sicherheit zu konstatieren. Bringt man nach unserer Methode den unteren Magneten an den Ort der Störung und den oberen nahe oder ganz außerhalb derselben und wählt man Abstand und Momente z. B. so, daß sich ohne Störung eine Spreizung der Magnete von 10 Grad einstellt, so ändert sich nach Eintritt der Störung die Spreizung beider Magnete um 2 Grad 10′, bezw. wenn man die Magnete umlegt, differieren die beiden Spreizungen ums Doppelte, so daß also die Änderung der Kraftlinienrichtung von 1 Minute in etwa 260facher Vergrößerung zur Erscheinung tritt.

Ein großer Vorzug der Methode besteht noch in ihrer weitgehenden Unabhängigkeit von den erdmagnetischen Variationen und allen möglichen Störungen anderer Art, sofern sie nur an den relativ wenig verschiedenen Orten beider Magnete in gleicher Weise auftreten. Im Unterschied vom gewöhnlichen Galvanometer ist dieses Doppelgalvanometer, wenn ich es so nennen darf, ganz unabhängig von den Variationen der Richtung des ganzen Feldes, und was die Variationen der Intensität betrifft, so erkennt man aus den Formeln 2 und 6, daß die Spreizung des Doppelgalvanometers viel empfindlicher auf die lokale Störung, als auf die Störungen des ganzen, beide Magnete umgebenden Feldes reagiert, da die lokale Störung im Verhältnis von 1 : tang^2, die Gesamtstörung dagegen nur im Verhältnis von 1 : tang desselben kleinen Winkels vergrößert erscheint.

Wir haben uns mit der Inhomogenität der Feldrichtung eingehender beschäftigt und diejenige der Feldstärke zunächst außer acht gelassen, weil der erste Fall als der praktisch wichtigere Teil erscheint. Wie man indes mit unsrem Magnetsystem auch eine Inhomogenität der Feldstärke untersuchen und vergrößert zur Erscheinung bringen kann, geht aus der nun folgenden Zusammenfassung hervor, welche alle hier vorliegenden Verhältnisse übersichtlich zusammenstellt.

Zusammenfassung.

Ein System von zwei vertikal übereinander hängenden, je in einer Horizontalebene frei schwingenden Magneten ist zur Untersuchung auch der feinsten Inhomogenitäten im magnetischen Feld in hohem Maße geeignet. In einem bestimmten Abstand können die beiden Magneten eine doppelte Stellung zueinander einnehmen, je nachdem der eine den andern nach O. oder W. ablenkt; die bei diesen beiden Stellungen auftretenden Differenzen enthüllen die Inhomogenitäten des Feldes. Wir haben den Winkel, den beide Magneten miteinander bilden, den Gegenwinkel, zu unterscheiden von dem Eigenwinkel, den jeder Magnet für sich durch seine beiden Stellungen bildet. Es sei

ψ_1 der Gegenwinkel vor } dem Umlegen.
ψ_2 der Gegenwinkel nach }

χ der Eigenwinkel des oberen Magneten
χ' der Eigenwinkel des unteren Magneten
| gerechnet von Elongation zu Elongation.

Dann haben wir folgende Sätze:

1. Die Differenz der Gegenwinkel gibt den Unterschied der Kraftlinienrichtung an Stelle des oberen und unteren Magneten:

$$\delta = \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2)\,\mathrm{tg}^2\frac{1}{4}(\psi_1 + \psi_2).$$

Die Kraftlinien laufen oben und unten je nach der Seite des daselbst befindlichen Magneten in derjenigen Stellung, welche das größere ψ ergibt. Zur Untersuchung auf Unterschiede in der Kraftlinienrichtung muß man also ein möglichst kleines ψ wählen.

2. Die Differenz der Eigenwinkel gibt den Unterschied der Horizontalintensität an Stelle des oberen und unteren Magneten.

Ist dieser $h = H_{\text{unten}} - H_{\text{oben}}$, so ist

$$-\frac{h}{H} = \frac{^1/_2(\chi - \chi')}{\mathrm{tg}\,^1/_4(\psi_1 + \psi_2)} + {}^2\frac{M - M'}{M + M'}.$$

Zur Untersuchung auf Unterschiede in der Intensität wird man also im Gegensatz zum 1. Fall ein möglichst großes ψ wählen. Das 2. Glied auf der rechten Seite trägt kleinen Unterschieden in der Stärke der Magnete Rechnung.

Die Methode ist von erdmagnetischen Variationen nahezu unabhängig und von allen andern Störungen insoweit, als sie den oberen und unteren Magneten in gleicher Weise treffen.

Berlin, Februar 1907.

(Eingegangen 17. Februar 1907.)

Einige Bemerkungen zu Herrn Boltzmanns Theorie der Zusammenstöße allgemeinster Art.

Von K. v. Wesendonk.

Verfasser möchte sich in dem Folgenden erlauben, auf einige Bedenken hinzuweisen, zu welchen ihm das Studium der im zweiten Teile seiner Vorlesungen über Gastheorie von Herrn Boltzmann enthaltenen möglichst allgemeinen Entwickelungen Veranlassung gegeben. Es geschieht dies hauptsächlich, um Physiker, welche (etwa als bes. Schüler) mit dem Gedankengange des großen Forschers näher vertraut sind, zu eingehenderer Darlegung des betr. Punktes zu veranlassen. Bei der hervorragenden Beachtung, welche man zurzeit der kinetischen Gastheorie und insbesondere Boltzmanns sog. H-Theorem zuwendet, verdient, vornehmlich auch mit Rücksicht auf die universelle Bedeutung der Entropie, die allgemeine Behandlung zusammengesetzter Moleküle gewiß das größte Interesse. Indem Verfasser wegen aller eingehenderer Auskunft auf Boltzmanns Vorlesungen über Gastheorie verweisen muß, seien ihm doch einige einleitende und erläuternde kurze Bemerkungen[1]) hier zunächst gestattet. Nachdem im ersten Teile nur einatomige Gase der Betrachtung unterzogen wurden, gelangen im zweiten Teile von S. 62 an, mit Hilfe sog. allgemeiner Koordinaten, und spezieller von S. 105 an zusammengesetzte Moleküle zur Behandlung. Es wird da angenommen (S. 106), daß zur Zeit t in einem Gasgemische ein Molekül bestimmter Gattung (d. h. eines der Gase des Gemisches) seiner Lage nach, sowie die relative Lage seiner Bestandteile, bestimmt werde durch μ allgemeine Koordinaten $p_1 \ldots p_\mu$. Drei davon können die rechtwinkligen Koordinaten seines Schwerpunktes sein (etwa p_1, p_2, p_3). Dazu gehören μ Momente $q_1 \ldots q_\mu$, welche sich als Ableitungen der lebendigen Kraft $\mathfrak{L}$ nach den Zeitdifferentialen der Koordinaten p_i' ergeben, so daß also $q_i = \frac{\partial \mathfrak{L}(p_i\, p_i')^2)}{\partial p_i'}$ $\left(\text{wo } p_i' = \frac{dp}{dt}\right)$. Versteht man dann unter ε_1 die gesamte Energie des betreffenden Moleküles, d. h. die Summe seiner kinetischen Energie plus der sog. Kraftfunktion der äußeren auf das Molekül wirkenden Kräfte und der intramolekularen Kräfte zusammen genommen, welche Größe konstant bleibt, solange keine Wechselwirkung (kein Stoß) mit anderen Molekülen statthat, so nimmt Boltzmann zunächst folgendes an: Bei sog. ungeordneter Verteilung der Zustände der Moleküle, welche die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gestattet, ist die Zahl der Moleküle erster Gattung zur Zeit t deren Bestimmungsvariable zwischen den Grenzen p_1 und $p_1 + dp_1\, p_2$ und $p_2 + dp_2 \ldots p_\mu$ und $p_\mu + dp_\mu$, q_1 und $q_1 + dq_1 \ldots q_\mu$ und $q_\mu + dq_\mu$ liegen $dn_1 = \mathfrak{f}(p_1 \ldots p_\mu\ q_1 \ldots q_\mu\, t)\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_\mu\, dq_1 \ldots dq_\mu = A_1 e^{-2h\varepsilon_1}\, dp_1 \ldots dq_\mu$, d. h. es ist $\mathfrak{f}(p_1 \ldots q_\mu\, t) = A_1 e^{-2h\varepsilon_1}$ zu setzen, wo A_1 konstant ist für alle Moleküle erster Gattung, h für alle Moleküle überhaupt. (Gleichung 118 nach Boltzmann, l. c. S. 109.) Alsdann bleibt die Zustandsverteilung, soweit nur intramolekulare Bewegung in Betracht kommt, stationär. Es wird dann aber Seite 112—122 gezeigt, daß daran auch Zusammenstöße nichts ändern. Leider sieht sich Herr Boltzmann genötigt, zu erklären, daß es nicht gelungen sei, das durch obige Gleichung 118 ausgedrückte (erweiterte Maxwellsche) Gesetz als das einzig

1) Schon um etwaige irrtümliche Auffassungen seitens Verf. besser hervortreten zu lassen.

2) $\mathfrak{L}(p_i, p_i')$ bedeutet, daß $\mathfrak{L}$ Funktion von p_i und p_i'.

mögliche allgemein zu erweisen. Es werden indessen von S. 217 an einige Ausführungen in dieser Richtung begonnen, und insbesondere auch versucht, das Verhalten der Größe H in möglichst allgemein gehaltenen Fällen zu bestimmen. Bedeutet f_r die der $r$ten Gattung von Molekülen des Gasgemisches entsprechende Wahrscheinlichkeitsfunktion, so ist nach Boltzmann bekanntlich (S. 219 Gleichung 240)

$$H_r = \int f_r \lg f \; du\, dv\, dw\, dp_1 \ldots dq_r .$$

Dabei wird ein Gemisch idealer Gase, d. h. solcher, bei denen die Wirkungssphäre verschwindend ist gegenüber dem mittleren Abstand zweier zunächst gelegener Moleküle angenommen, x, y, z sind die rechtwinkligen Koordinaten, u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten in deren Richtungen für den Schwerpunkt eines Moleküles z. B. erster Gattung. Unter $p_1 \ldots p_r$ sollen generalisierte Koordinaten der Bestandteile des Moleküles in bezug auf drei den Richtungen nach konstante, durch den Schwerpunkt des Moleküles gezogene rechtwinklige Achsen verstanden werden, dazu gehören die Momente $q_1 \ldots q_r$. Äußere Kräfte sollen nicht als vorhanden angenommen werden, da sie, ohne prinzipielle Schwierigkeiten zu bieten, die Betrachtung komplizieren, es sind daher in obiger Gleichung 240 auch[1]) die Schwerpunktskoordinaten x, y, z nicht eingeführt (vergl. S. 114). Es gelingt nun Boltzmann zunächst zu zeigen (S. 220—222), daß H durch intramolekulare Bewegung an sich überhaupt nicht geändert wird. „Obwohl die Veränderung von H durch die Zusammenstöße für ideale Gase mit zusammengesetzten Molekülen noch ganz allgemein berechnet werden kann", wird doch zunächst ein Spezialfall betrachtet, auf den wir nicht eingehen wollen (S. 222—229). Dann beginnt S. 230 die allgemeinste Charakterisierung des Vorganges eines Zusammenstoßes zweier Moleküle. (Allgemeinste Form der Wechselwirkung.) Es soll dabei folgendes gelten:

Ist der Abstand s der Schwerpunkte zweier Moleküle bestimmter verschiedener Art größer als $\mathfrak{b}_r$, so soll niemals eine merkliche Wechselwirkung eintreten zwischen den Molekülen der beiden Arten. Eine Kugel mit dem Radius $\mathfrak{b}$ um den Schwerpunkt eines Moleküles erster Art gelegt, sei dessen (Wirkungs-)Sphäre genannt in bezug auf Moleküle zweiter Art. Tritt der Schwerpunkt eines der letzteren innerhalb diese Sphäre hinein, so soll mit verschwindenden Ausnahmen ein Stoß im erweiterten Sinne (Wechselwirkung) eintreten, und wird dadurch eine bedeutende Modifikation der Bewegung der beiden Moleküle bewirkt. Eine Zusammenstellung eines Moleküles erster und zweiter Gattung, bei der die Entfernung der Schwerpunkte gleich $\mathfrak{b}$ ist, soll eine „kritische" heißen. Bewegt sich beim Eintreten einer solchen kritischen Konstellation der Schwerpunkt des zweiten Moleküles in die Sphäre des ersten hinein, so soll also dadurch der Beginn eines Stoßes im weiteren Sinne des Wortes eintreten, entsprechend wird das Ende eines Stoßes charakterisiert. (Anfangs- und Endkonstellation.) Es wird, wie Verf. scheinen will, hiermit in gewissem Sinne der Zusammenstoß zusammengesetzter Moleküle auf den zweier kugelförmiger Gebilde zurückgeführt, nur daß nicht, wie bei den Betrachtungen des ersten Teiles der Vorlesungen über Gastheorie, speziell elastische Kugeln oder Kraftzentren angenommen werden. Es stellt dies wohl in vielen Fällen eine eventuell erhebliche weitere Annäherung an die Wirklichkeit dar, aber es erscheint Verf. doch bedenklich, so bei dem allgemeinsten Falle der Wechselwirkung zu verfahren. Wenn z. B. langgestreckte, zylindrische, stäbchen-, lemniskatenförmige etc. Moleküle vorkommen, wenn die Kräfte, die ein Molekül auf andere ausübt, vielleicht nicht einmal symmetrisch um den Schwerpunkt verteilt sind, so dürfte es schwer sein, einen geeigneten kritischen Radius $\mathfrak{b}$ zu finden. Es könnte dann der Fall sich ereignen, daß wenn der Schwerpunkt des Moleküles zweiter Gattung an einer nicht mehr zu vernachlässigenden Anzahl Stellen in die (Wirkungs-)Sphäre eintritt, dies keine Wechselwirkung (Stoß) zur Folge hat. Doch wir wollen uns zunächst den weiteren Betrachtungen Herrn Boltzmanns anschließen, und behandeln kritische Konstellationen, welche folgende Bedingungen erfüllen. Für die Moleküle erster Gattung sollen die Geschwindigkeitskomponenten des Schwerpunktes $(u_1\, v_1\, w_1)$ zwischen den Werten u_1 und $u_1 + du_1$, v_1 und $v_1 + dv_1$, w_1 und $w_1 + dw_1$ liegen, ferner die übrigen den Zustand charakterisierenden generalisierten Koordinaten und Momente $p_1 \ldots p_r$, $q_1 \ldots q_r$ zwischen den Grenzen p_1 und $p_1 + dp_1$ $\ldots$ q_r und $q_r + dq_r$ angenommen werden. Ähnliches gelte für die Moleküle zweiter Gattung. Die Richtung der Verbindungslinie der beiden Schwerpunkte befinde sich innerhalb eines unendlich schmalen Kegels von der Öffnung $d\lambda$. Alle diese Bedingungen zusammen nennt Boltzmann (S. 231) die Bedingungen 267. Eine Konstellation soll eine entgegengesetzte heißen, (S. 231 unten), wenn ceteris paribus für alle Geschwindigkeiten die entgegengesetzten gleichen Größen eingesetzt werden.[1]) Entspre-

1) Die Anzahl der Moleküle erster Gattung in der Volumeinheit, für welche die Zustandsvariabeln, kurz gesagt, $u, v, w, p_1 \ldots q_r$ gelten, ist gesetzt $= f_1(u\, v\, w\, p \ldots q_r\, t)\, du\, dv\, dw\, dp_1 \ldots dq_r$.

1) Statt $u_1\, v_1\, w_1$ treten also $(-u_1)(-v_1)(-w_1)$ auf, statt $q_1 \ldots q_r$ ferner $(-q_1) \ldots (-q_r)$.

chende Konstellationen treten ein, wenn das erste Molekül völlig unverändert bleibt, man das zweite aber um die Größe 2 b ohne Änderung der Konfiguration und Geschwindigkeiten seiner Bestandteile sich selbst parallel in der Richtung der Verbindungslinie der Schwerpunkte verschoben denkt; mit anderen Worten, indem man ohne Änderung des Zustandes und ohne Drehung der Moleküle im Raume die Orte der Schwerpunkte der beiden Moleküle vertauscht. Nun ist die Zahl der Moleküle erster Gattung, deren Koordinaten und Momente und Geschwindigkeiten die oben angegebenen sind (in der Volumeneinheit), zur Zeit t gleich $\mathfrak{f}_1(u_1\, v_1\, w_1\, p_1 \ldots q_r\, t)\, du_1 \ldots dq_r$, wo $\mathfrak{f}_1(u_1 \ldots q_r\, t)$ die bereits erwähnte Wahrscheinlichkeitsfunktion bedeutet, die wir späterhin kurz mit $\mathfrak{f}_1$ bezeichnen. (Index 1 bezieht sich hier auf Moleküle erster Gattung.) Für Moleküle zweiter Gattung gelte ganz entsprechend

$$\mathfrak{f}_2\, du_2\, dv_2\, dw_2\, dp_{r+1} \ldots dp_{r+} \ldots dq_{r+1} \ldots dq_{r+r},$$

abgekürzt setzen wir für diese beiden Ausdrücke $\mathfrak{f}_1\, d\omega_1$, $\mathfrak{f}_2\, d\omega_2$. Dann ist, wenn k die relative Geschwindigkeit der Schwerpunkte der beiden Moleküle in der Richtung von deren Verbindungslinie bedeutet, nach Boltzmanns früheren Ausführungen[1]), die Zahl der Zusammenstöße, deren Anfangskonstellation als eine kritische Konstellation nach 267 erscheint, während des Zeitelementes dt:

$$dN = \mathfrak{f}_1\, \mathfrak{f}_2\, d\omega_1\, d\omega_2\, \mathfrak{b}^2\, k\, d\lambda\, dt.$$

(Gastheorie II, S. 232, Gleichung 267 a.) Für die kritische Konstellation, mit der nun diese Stöße enden, sollen alsdann Geschwindigkeiten, generalisierte Koordinaten und Momente die Werte angenommen haben:

$$U_1,\ V_1,\ W_1,\ P_1 \ldots P_r,\ Q_1 \ldots Q_r$$

resp.

$$U_2,\ V_2,\ W_2\ P_{r+1} \ldots P_{r+r} \ldots Q_{r+}\ ,$$

die Verbindungslinie soll innerhalb eines unendlich kleinen Kegels $d\Lambda$ liegen, die relative Geschwindigkeit der beiden Schwerpunkte sei dann K, aus $d\omega_1$ und $d\omega_2$ resp. $d\Omega_1$ und $d\Omega_2$ geworden. (Bedingungen 269 für kritische Endkonstellationen siehe S. 233.) Nach einem von Boltzmann eingehend besprochenen (S. 66—82) Satze von Liouville gilt dann, wenn ξ, η, ζ die Differenzen der Koordinaten der beiden Schwerpunkte bei der kritischen Anfangskonstellation der beiden Moleküle bezeichnet, Ξ, H, Z dagegen bei der Endkonstellation die Gleichung

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\omega_1\, d\omega_2 = d\Xi\, dH\, dZ\, d\Omega_1\, d\Omega_2.$$

Nun führt Boltzmann Polarkoordinaten ein und erhält so für diese (Liouvillesche) Gleichung (272)

$$k d\lambda\, d\omega_1\, d\omega_2 = K d\Lambda\, d\Omega_1\, d\Omega_2;$$

worin die einzelnen Größen die früher angegebene Bedeutung haben. Nun werden durch kritische Anfangskonstellationen nach 267

$$dN = \mathfrak{f}_1\, \mathfrak{f}_2\, d\omega_1\, d\omega_2\, \mathfrak{b}^2\, k d\lambda\, dt$$

Moleküle erster Gattung durch den Stoß in solche mit den Variabeln $U_1 \ldots Q_{r+r}$, $d\Lambda K$ übergeführt. Die Zahl der Stöße aber, bei welchen zwei Moleküle, dieser Endkonstellation (wie oben erläutert) entsprechend, mit denselben Variabeln ($U_1 \ldots Q_{r+r}$, etc.)[1]) zur kritischen Anfangskonstellation während dt gelangt sind:

$$dN' = F_1\, F_2\, \mathfrak{b}^2\, K d\Omega_1\, d\Omega_2\, d\Lambda\, dt.^2)$$

In dem ersten Falle stoßen ja dN-Moleküle erster Gattung, deren Zustand durch $u_1 \ldots q_r$ charakterisiert ist, mit Molekülen zweiter Gattung innerhalb des Richtungskegels $d\lambda$ zusammen, und gehen dann nach dem Stoße auseinander mit den Zustandsvariabeln $U_1 \ldots Q_r$ innerhalb $d\Lambda$. Verschiebt man dann die Moleküle, wie oben angegeben, zur entsprechenden Konstellation, und betrachtet nun Moleküle erster Gattung mit den Zustandsvariabeln $U_1 \ldots Q_r$ und zweiter Gattung mit $U_2 \ldots Q_{r+r}$, so stoßen diese jetzt, wie man leicht sieht, zusammen mit dem Richtungskegel $d\Lambda$, und es gilt für die Zahl der Kollisionen der obige Ausdruck für dN'. Nun soll aber nach Boltzmann durch jeden dieser entsprechenden Stöße ein Molekül erster Gattung, dessen Zustand durch $U_1 \ldots Q_r$ bestimmt ist, zurückverwandelt werden in ein solches, dessen Zustand durch $u_1 \ldots q_r$ bestimmt ist. Es verschwinden also dabei dN-Moleküle erster Gattung des Zustandes $u_1 \ldots q_r$ und werden dN' davon neu erzeugt. Damit also stationäre Verhältnisse eintreten, muß $dN = dN'$ sein, d. h. wenn man das oben erwähnte Ergebnis des Liouvilleschen Satzes beachtet, es muß gelten $\mathfrak{f}_1\, \mathfrak{f}_2 = F_1\, F_2$ und Entsprechendes für andere Molekülgattungen. Der gesperrt gedruckte Satz scheint nun Verf. zu Bedenken Veranlassung zu geben. Boltzmann bespricht bereits im ersten Teile, S. 28 und 29, Stöße, durch die sozusagen das Ergebnis anderer (direkter) Stöße wieder rückgängig gemacht wird. Für den Fall, daß die Moleküle elastische Kugeln sind, ist dort in Fig. 3 und 4 ein Stoß und sein entgegengesetzter gezeichnet, man sieht (siehe die Reproduktion, hier Fig. 1), daß in 1 a die beiden Moleküle mit den Geschwindigkeiten c und c_1 zusammenstoßen und mit den Geschwindigkeiten c' und c'_1 auseinandergehen, während sie in 1 b mit den Geschwindigkeiten c' und c'_1 zu-

1) Teil I, § 3.

1) Resp. zwischen Grenzen liegen U_1 und $U_1 + dU_1 \ldots$ P_1 und $P_1 + dP_1 \ldots\ldots Q_{r+r}$ und $Q_{r+r} + dQ_{r+r}$.

2) Hier steht F_1 für $\mathfrak{f}_1(U_1 \ldots Q_r\, t)$ ebenso, F_2 für das zum Molekül zweiter Gattung gehörige $\mathfrak{f}_2(U_2\, V_2\, W_2 \ldots Q_{r+r}\, t)$.

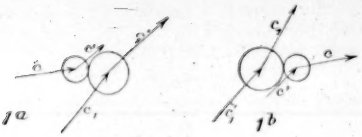


Fig. 1

sammenstoßen und mit c und c_1 auseinandergehen. Boltzmann scheint nun diese Verhältnisse auf den allgemeinsten Fall für übertragbar zu halten, und solange man die zusammengesetzten Moleküle durch Kugeln vom Radius der Wirkungssphäre einigermaßen ersetzen kann, ist das auch wohl zuzugeben. Betrachtet man aber Moleküle von der in Fig. 2 angedeu-

Fig. 2a. Fig. 2b. Fig. 3.

Fig. 2a soll die kritische Endkonstellation eines allgemeinen Stoßes darstellen bei sichelförmigen Molekülen. Der Kreis soll die Wirkungssphäre andeuten.
Fig. 2b stellt die angeblich den entgegengesetzten Stoß herbeiführende entsprechende Anfangskonstellation dar

teten Gestalt, wo in 2a der direkte, in 2b der entsprechende Stoß darzustellen versucht ist, so kann man kaum glauben, daß 2b der Wirkung von 2a genau entgegengesetzt sein kann. Man wird wohl zum Verschieben mindestens noch eine geeignete Drehung im Raume fügen müssen, um die Moleküle in eine, sagen wir „entsprechende" Lage zu bringen, wie sie in Fig. 3 angedeutet, welche wenigstens in gewisser Annäherung[1]) den entgegengesetzten Stoß ermöglicht. Boltzmann sucht, S. 235—240, möglichst allgemein darzutun, durch das Verhalten von $\frac{dH}{dt}$, daß für einen stationären Zustand die Gleichungen $f_1 f_2 = F_1 F_2$ etc. bestehen müssen, d. h. es muß dann auch die obige Forderung $dN = dN'$ erfüllt sein. Daraus folgt aber nach Boltzmann nur dann der stationäre Zustand, wenn die betreffenden, d. h. auch die Gleichung 272 erfüllenden Stöße entgegengesetzte sind. Die Erledigung dieser, wie Verf. scheinen will, sehr wichtigen Frage betrifft auch den S. 264—265 von Boltzmann nach Maxwell geführten allgemeinen Beweis für die Bedingungen des stationären Zustandes, wo es heißt: „Wir wollen nun die ganze Zustandsänderung in der schon oft beschriebenen Weise umgekehrt denken" (S. 265). Da hier die sog. Annahme A (S. 263), nämlich daß, wenn ceteris paribus nur das Vorzeichen der Geschwindigkeiten umgekehrt wird, die Stoßwahrscheinlichkeit gleich bleibt, ausdrücklich abgelehnt wird, so handelt es sich hier auch wohl wieder um dieselben entgegengesetzten entsprechenden Stöße wie S. 235. Daß mit Annahmen, wie sie in Fig. 3 gemacht, dem Mangel abgeholfen werde, möchte Verf. durchaus nicht behaupten, eine genauere Untersuchung der Bedingungen des stationären Zustandes besonders in bezug auf Stöße erscheint dringend erwünscht. Vielleicht auch ergibt sich aus der Diskussion die Notwendigkeit der Annahme, wie sie Boltzmann für den allgemeinsten Stoß formuliert. Nähere Angaben zunächst über dessen Anschauungen, sofern sie die in der „Gastheorie" nur mehr angedeuteten allgemeinsten Verhältnisse betreffen, wären jedenfalls sehr erwünscht.

(Eingegangen 17. Februar 1907.)

1) Allerdings treten dabei Änderungen der allgemeinen Koordinaten ein, welche einer Drehung eines starren Systems entsprechen, der innere Zustand bleibt unverändert.

Die Temperaturstrahlung des Joddampfes.

Bemerkung zur Arbeit von Herrn Fredenhagen.[1])

Von Max Reinganum.

Es sei mir gestattet, kurz auf die im Titel genannte Arbeit einzugehen. Die in derselben mitgeteilten Versuche, wie die zugrunde gelegten Anschauungen scheinen mir nicht völlig einwandfrei zu sein.

Der Herr Verfasser sucht zu beweisen, daß Joddampf nur an Stellen von Temperaturgefälle ein Bandenspektrum aussenden könne, sonst aber, wie jedes Gas, seiner Ansicht nach, nur ein kontinuierliches Spektrum. Der erste Versuch besteht darin, daß in einem (thermodynamisch) beiderseits offenen elektrischen Ofen ein mit Joddampf gefülltes Quarzrohr ca. 14 cm weit eingesenkt ist und erhitzt wird. Die Temperatur wird auf etwa 1250° C gesteigert. Der Verf. beobachtet nun in der Längsrichtung des Rohres ein kontinuierliches Spektrum und sieht dieses als Beweis dafür an, daß bei konstanter Temperatur von Joddampf kein Bandenspektrum ausgesandt wird. Da nun aber Joddampf bei hoher Temperatur merklich alle Wellenlängen absorbiert[2]), so muß eine Schicht von der gewählten Dicke alle Wellenlängen angenähert emittieren. Ein einwandfreier Versuch wäre zu zeigen, daß eine dünne Schicht Joddampf bei konstanter Temperatur kein Bandenspektrum emittiert. Den Einfluß der Dicke hat übrigens bereits Herr Wood betont[3]), er teilt

1) Diese Zeitschr. **8**, 89—91, 1907.
2) S. z. B. Konen, Wied. Ann. **65**, 286, 1898.
3) W. Wood, Phil. Mag. (12) **8**, 329, 1906.

folgenden Versuch mit: Eine Quarzbirne, mit Joddampf gefüllt, wurde an ihrer breiten Stelle erhitzt und gab ein kontinuierliches Spektrum mit schwachem Hervortreten der Banden. Wurde ein schmaler Ansatz des Rohres erhitzt, so zeigte sich das Bandenspektrum viel deutlicher. Wood erklärt dies auch dadurch, daß im ersten Falle die Tiefe der Strahlung zu groß war. Somit dürfte ein genau ausgeführter Versuch mit dünner Schicht nicht im Sinne des Herrn Verfassers verlaufen.

Kommen wir auf die weiteren Versuche von Herrn Fredenhagen, so ist die Bedingung der Dünne der Schicht in der Tat bei denselben erfüllt, wir haben also zunächst die Umstände und nicht das bei den Versuchen vorhanden gewesene Temperaturgefälle als Ursache des beobachteten Bandenspektrums anzusehen.

Was die eingangs erwähnte theoretische Anschauung anbetrifft, so ist folgendes zu bemerken. Man wird wohl der Ansicht sein, daß grüner Chlordampf von (konstanter) Zimmertemperatur gegen eine kühlere Fläche ein Spektrum ausstrahlt, das im grünen Teile ein Maximum aufweist, genau nach dem Kirchhoffschen Gesetz, und somit ein selektives ist. Es liegt daher kein Grund vor, anzunehmen, daß ein Gas von höherer konstanter Temperatur nicht auch selektiv bezw. diskontinuierlich emittieren kann, und daß aus irgendwelcher Ursache das Kirchhoffsche Gesetz nicht anzuwenden wäre. Stellen wir uns auch mit dem Herrn Verfasser auf den Standpunkt, daß das Bandenspektrum des im Dissoziationszustand befindlichen Joddampfes durch dauernde Polymerisationen von Joddampf hervorgerufen wird, so liegt doch kein Grund vor, anzunehmen, daß solche Polymerisationen erst eintreten, wenn ein Temperaturgefälle vorhanden ist. Dieselben müssen vielmehr auch bei konstanter Temperatur aus Gründen des kinetischen Gleichgewichts stets vorhanden sein. In dem bei dem Vorgang der Wärmeleitung nicht erreichten Maximalwert der Entropie den Grund des Bandenspektrums zu suchen, wie der Herr Verfasser schon früher versucht [1]), ist aber wohl nicht angängig. Denn die äquivalente Abweichung von der Maxwellschen Verteilung ist keinesfalls bedeutend genug, um völlig neue Wirkungen wie das Auftreten eines Bandenspektrums hervorzurufen.

Von Interesse dürften dagegen diejenigen Beobachtungen des Herrn Verfassers sein, nach denen bei dem Vorgang der Sublimation und Verdichtung das Bandenspektrum verstärkt erscheint. Diese Versuche könnten in der Tat dafür sprechen, daß die Ursache der Emission des Bandenspektrums des Jods in den dauernd erfolgenden Assoziationen zu suchen ist.

Freiburg i. Br., den 8. Februar 1907.

(Eingegangen 13. Februar 1907.)

1) Vergl. die Betrachtungen des Verfassers in seiner Arbeit, Ann. d. Phys. **20**, 1906, auf Seite 164—165.

Die Absorption der γ-Strahlen radioaktiver Substanzen.

Von A. S. Eve.

Die Untersuchungen, über welche ich im nachstehenden berichten will, sind ausgeführt worden in der Absicht, festzustellen, ob die γ-Strahlen als ein genaues Maß für die Gesamtmenge der in einer gegebenen Substanz vorkommenden radioaktiven Materie angenommen werden können. Zu diesem Zwecke war es erforderlich, festzustellen, ob die γ-Strahlen verschiedener Substanzen unter gleichen Bedingungen in gleichem Maße absorbiert werden.

Wenn man die Aktivität einer Substanz an ihren α- oder β-Strahlen mißt, so ist die beobachtete Wirkung von der Dichte der aktiven Substanz abhängig. Bei den β-Strahlen ist es notwendig, die α-Strahlen mit Hilfe von Schirmen aus Aluminium oder einem anderen leichten Material abzuschirmen. Diese Schirme nun absorbieren die β-Strahlen verschiedener aktiver Substanzen nicht in demselben Maße, so daß demgemäß die β-Strahlen als Maß für die Aktivität nicht genügen.

Es schien von vornherein guter Grund für die Annahme vorzuliegen, daß die γ-Strahlen ein durchaus hinreichendes Maß für die gesamte in einem gegebenen Körper vorhandene radioaktive Materie liefern würden, weil nämlich diese Strahlen unter den gewöhnlichen Versuchsbedingungen durch die Materie, von welcher sie ausgesandt werden, nur in geringem Grade absorbiert werden. Ferner ist es möglich, die Strahlung der Substanz im ganzen zu messen, und dies ist ein Vorteil, wenn es sich um die Untersuchung beträchtlicher Erzmengen handelt. Vorläufige Versuche deuteten überdies darauf hin, daß die γ-Strahlen von Thor, Uran und Radium beim Durchgang durch Bleiplatten von denselben Schichtdicken in gleichem Grade absorbiert würden. Es wurde indessen im Verlauf dieser Versuche gefunden, daß Radium und Thor allerdings γ-Strahlen aussenden, welche identische Absorptionskoeffizienten haben, während andererseits die γ-Strahlen von Uran schwach sind und leicht absorbiert werden. Somit kann die Methode der γ-Strahlen zwar mit großem Vorteil zur Vergleichung von Radium und Thor Anwendung finden, aber Uran und Aktinium können auf diese Weise weder mit diesen Stoffen noch untereinander verglichen werden.

Versuchsanordnung.

Ein Elektroskop von 30 cm Höhe und 20 cm Durchmesser, aus 0,45 mm starkem Zinkblech gefertigt, enthielt an einem langen isolierten Stabe in der Mitte das übliche Goldblattsystem. Der Abfall des Potentiales wurde durch den Ausschlag des Goldblättchens gemessen, und dieser Ausschlag wurde mittels eines Mikroskops abgelesen, das im Okular einen graduierten Maßstab enthielt. Die zu untersuchende radioaktive Substanz wurde auf ein Tischchen etwa 7 cm unterhalb des Elektroskops gelegt. Zwischen den aktiven Körper und das Elektroskop wurden Bleischichten eingeschaltet. Die Korrektionen für den natürlichen Elektrizitätsverlust des Instrumentes wurden in der üblichen Weise angebracht. Als absorbierendes Material wurde in sämtlichen Fällen Blei verwandt.

Untersuchte Substanzen.

1. Radiumbromid.
2. Uraninit aus Joachimsthal in Böhmen, 1 Kilogramm.
3. Uraniumnitrat, hergestellt von Eimer und Amend, 1 Kilogramm.
4. Thoriumnitrat, hergestellt von Eimer und Amend, 2 Kilogramm.
5. Radiothorium; dieses war mir von seinem Entdecker, Herrn Dr. Hahn, der gerade im hiesigen Laboratorium arbeitete, leihweise überlassen worden.
6. Aktinium, Gieselsches Präparat, Aktivität ungefähr 300.
7. Aktinium, Präparat von Debierne, Aktivität ungefähr 700. Diese Substanz, welche Eigentum von Sir William Ramsay ist, wurde mir von Herrn Dr. Hahn in liebenswürdiger Weise leihweise überlassen.

Ergebnisse.

Bezeichnen wir mit $\mathcal{J}_0$ die Strahlungsintensität auf der Vorderseite einer Bleiplatte, mit $\mathcal{J}$ die Intensität auf der anderen Seite der Platte nach erfolgter Absorption, so erhalten wir die Beziehung

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 e^{-\lambda x},$$

wo x die Dicke der Platte und λ den Absorptionskoeffizienten bedeutet. Diese Formel ist aus der Gleichung

$$\frac{d\mathcal{J}}{dx} = -\lambda \mathcal{J}$$

abgeleitet und setzt voraus, daß die Absorption durch eine dünne Schicht, auf die Einheit der Schichtdicke bezogen, der Intensität proportional ist. Nun haben Mc Clelland, Wigger u. a. gefunden, daß für Radium λ innerhalb weiterer Grenzen nicht konstant ist, daß vielmehr die weniger durchdringungsfähigen γ-Strahlen zuerst absorbiert werden und die folgenden Werte für λ demgemäß kleiner sind. Bei den vorliegenden Versuchen werden die Grenzen für die Schichtdicken, zwischen denen die Werte für λ erhalten worden sind, angegeben werden, und zwar ausschließlich der geringen Korrektionen für die durchlaufene Luftstrecke wie für das 0,45 mm starke Zinkblech, welches die Grundplatte des Elektroskops bildete, und für die Glasgefäße, beispielsweise die Probiergläschen, in die einige der Substanzen eingefüllt wurden.

Radium.

Die Ergebnisse, welche ich für Radium erhalten habe, stehen in guter Übereinstimmung mit denen, die Mc Clelland unter Benutzung der elektromagnetischen Methode gefunden hat. [1])

γ-Strahlen

Dicke der Bleischicht in cm	λ in cm^{-1}
0,64 bis 1,21	0,57
1,21 bis 1,79	0,56
1,79 bis 2,36	0,46
2,4 bis 3,0	0,46

Mc Clelland fand, daß λ sich innerhalb derselben Grenzen für die Schichtdicke von 0,64 bis auf 0,44 änderte. Das Ergebnis ist in Fig. 1 dargestellt. Daselbst bezeichnen die Abszissen die Dicke der durchstrahlten Bleischicht, und die Ordinaten geben die Logarithmen der Intensitäten wieder, wie sie am Goldblattelektroskop gemessen wurden. Wie man sieht, verläuft die hiernach gezeichnete Linie für Radium nicht gerade, und der Wert für λ zeigt eine allmähliche geringe Abnahme.

Uraninit.

Die aus Joachimsthal stammende Probe lieferte Werte für λ, die mit den am Radiumbromid erhaltenen fast identisch sind, obgleich

1) Phil. Mag. Juli 1904.

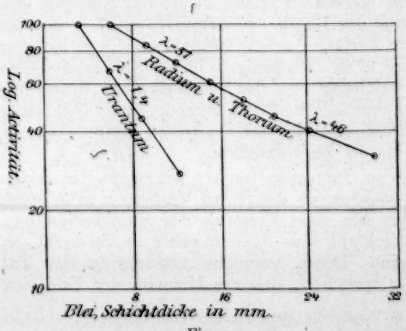


Fig. 1.

das Radium in dem einen Falle konzentriert und im anderen auf ein Kilogramm Pechblende verteilt war. Wir werden später sehen, daß die γ-Strahlen von Uran in einer 0,64 cm dicken Bleischicht nahezu vollständig absorbiert werden, und daß demnach die γ-Strahlen aus dem Uraninit der Hauptsache nach vom Radium herrühren und ein Maß für die vorhandene Radiummenge bilden, da nicht mehr als 20 v. H. durch Selbstabsorption verloren gehen.

Thor.

Ein Kilogramm Thoriumnitrat wurde in einen flachen Glaszylinder von 16 cm Durchmesser eingeschmolzen. Es fand sich, daß die Werte für λ praktisch die gleichen waren wie die am Radium und am Uraninit gewonnenen.

Radiothorium.

Es verdient bemerkt zu werden, daß Radiothorium Werte für λ ergab, die mit den beim Radium und beim Thorium gefundenen nahezu identisch sind, daß aber die Strahlen von Radiothorium anfänglich ein wenig durchdringungsfähiger zu sein scheinen, möglicherweise deshalb, weil die Selbstabsorption eine geringere ist. Herr Dr. Hahn hat gezeigt, daß Radiothorium Thorium-X und Thoriumemanation hervorbringt, und da nun Radiothorium ähnliche Strahlen aussendet wie Thorium, so haben wir einen weiteren Beweis — wenn anders noch ein Beweis erforderlich wäre — für die Ähnlichkeit zwischen Radiothorium und Thor. Radiothorium ist bisher in reinem Zustande noch nicht erhalten worden, aber die elf Milligramm, die Herr Dr. Hahn mir zu leihen die Liebenswürdigkeit hatte, waren, an den γ-Strahlen gemessen, 1570 Gramm Thoriumnitrat äquivalent. Dieses Resultat ist von derselben Größenordnung wie das, welches Herr Hahn unter Benutzung der γ-Strahlen gefunden hat; Radiothorium ist demnach 143 000 mal stärker aktiv als Thoriumnitrat. Wir werden aber später sehen, daß die letztere Substanz, nämlich Thoriumnitrat, ungefähr 15 v. H. ihrer γ-Aktivität durch Selbstabsorption einbüßt; so daß also Radiothorium tatsächlich etwa 12×10^4 mal stärker aktiv ist als eine gleiche Gewichtsmenge Thoriumnitrat. Man hat nun gefunden, daß Radiumbromid ungefähr 15×10^6 mal so aktiv ist wie Thoriumnitrat, wenn man die Messungen der γ-Strahlung zugrunde legt; demnach besaß das unreine Radiothorium eine Aktivität, die etwa den hundertsten Teil der Aktivität reinen Radiumbromids betrug.

Es dürfte sich empfehlen, hier die Zahlen mitzuteilen, die für die bislang betrachteten Substanzen tatsächlich erhalten worden sind. Die Unterschiede zwischen den beobachteten Intensitäten liegen wahrscheinlich innerhalb der Grenzen der Versuchsfehler; es ist nämlich schwierig, so verschiedene Substanzen unter genau entsprechende Bedingungen gegenüber dem Elektroskop zu bringen.

γ-Strahlen

Gesamtdicke der Bleischicht in cm	Intensitäten			
	Radium	Uraninit	Thoriumnitrat	Radiothorium
0,64	100	100	100	100
1,21	72	73	72	75
1,79	52	53	52	55
2,36	40	41	40	42
3,00	29	30	31	31

Uran.

Die Wirkung der γ-Strahlen von Uran fand ich überraschend gering. Ein Kilogramm Thoriumnitrat ergab eine zehnmal so starke Wirkung wie ein Kilogramm Uraniumnitrat, beide Wirkungen nach Durchstrahlung von 0,64 cm Blei gemessen. Die γ-Strahlen von Uran wurden so leicht absorbiert, daß es nicht möglich war, λ in weiteren Grenzen oder mit großer Genauigkeit zu messen. Das Mittel aus wiederholten Beobachtungen zwischen 0,28 und 0,57 cm, wie zwischen 0,64 und 0,92 cm ergab $\lambda = 1{,}4$; die γ-Strahlen scheinen demnach, wie die β-Strahlen dieser Substanz, homogen zu sein. Eine Probe reinen Urans ergab angenähert $\lambda = 1{,}6$. Im Falle von Uraniumnitrat muß der Verlust an γ-Aktivität infolge von Selbstabsorption groß sein.

Das Verhältnis zwischen den Aktivitäten von Uraniumnitrat und Thoriumnitrat wurde durch Messung der Wirkung der α- und der β-Strahlen aus je 12 Gramm von jeder dieser beiden Substanzen bestimmt. Es war

für die α-Strahlen: 0,6,
für die β-Strahlen: 6,0,

während für 1 Kilogramm von jeder Substanz das Verhältnis

für die γ-Strahlen: 0,1

war.

Somit dürfte ersichtlich sein, daß diese Methoden keinen sicheren Prüfstein für die Vergleichung der Gesamtaktivitäten von Uran und von Thor oder von Uran und von Radium abgeben, und derselben Schwierigkeit werden wir beim Aktinium begegnen. Andererseits macht die Gleichheit der Absorption der γ-Strahlen von Thor und Radium die γ-Strahlung zu einem genauen Vergleichsmaß für die vereinigten Mengen dieser radioaktiven Stoffe in zwei gegebenen Körpern.

Aktinium.

Im Septemberheft des Philosophical Magazine vom Jahre 1905 hat Herr Dr. Godlewski

eine Mitteilung über einige durchdringende Strahlen des Aktiniums mit einem Absorptionskoeffizienten von 4,5 berichtet. Er experimentierte mit einem Gieselschen Aktiniumpräparat mit einer Aktivität von ungefähr 300 und war in der Lage, Messungen bei Schichtdicken bis zu 3 mm Blei anzustellen. Bei Benutzung eines kräftigeren Debierneschen Aktiniumpräparates mit einer Aktivität von ungefähr 700 war es mir möglich, die Untersuchungen von Godlewski weiter auszudehnen. Wenn die Strahlen nur durch das 0,45 mm starke Zinkblech drangen, welches die Grundplatte des Elektroskops bildete, so wurde die Aktivität durch 2,35 Skalenteile in der Minute gemessen. Fügte ich nach und nach 0,15 mm, 0,30 mm, 0,45 mm Blei hinzu, so sank die beobachtete Aktivität nach einem Exponentialgesetz mit $\lambda = 10{,}5$. Diese Strahlen bestehen wahrscheinlich zum Teil aus homogenen β-Strahlen. Ich habe sie in das Diagramm Fig. 2 nicht mit eingetragen. Ich fügte weiter Bleifolien von je 0,15 mm ein, bis eine Gesamtschichtdicke von 2,85 mm erreicht war. Die Ergebnisse wurden auf Logarithmenpapier verzeichnet und ergaben eine gerade Linie; die Strahlen sind demnach zwischen diesen Grenzen homogen. Dieses Ergebnis bestätigt die Versuche, die Herr Godlewski mit dem Aktinium von Giesel angestellt hat, doch fand er $\lambda = 4{,}5$, und im vorliegenden Falle ist $\lambda = 4{,}1$. Diese Werte sind nahezu gleich, denn λ ist eine empfindliche Funktion, und die Verschiedenheit beruht wahrscheinlich auf den Versuchsbedingungen. Die beiden Aktiniumpräparate haben dieselbe Emanation und dieselbe induzierte Aktivität, und es ist daher auch derselbe Absorptionskoeffizient zu erwarten.

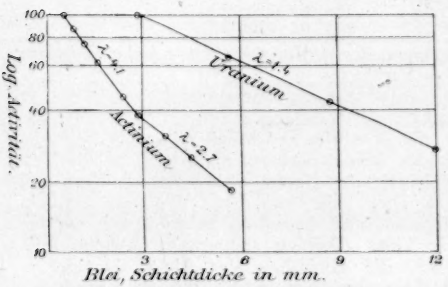


Fig. 2

War eine Schichtdicke von 2,85 mm Blei erreicht, so trat ein ziemlich ausgesprochener Wechsel ein, und λ wurde gleich 2,7; diesen Wert behielt es dann bis zu einer Schichtdicke von 4,35 mm bei, oder gar bis zu einer solchen von 5,7 mm. Über diese Grenze hinaus waren die Wirkungen gering und sehr schwer zu messen, indessen deutete das Mittel aus wiederholten Beobachtungen darauf hin, daß λ für Schichtdicken zwischen 5,7 mm und 8,7 mm ungefähr gleich 2 war.

Die Ergebnisse sind in Fig. 2 dargestellt[1]); es dürfte indessen zweckmäßig sein, sie auch in Gestalt einer Tabelle zusammenzustellen:

γ-Strahlen

Schichtdicke in mm Zink		Blei	λ in cm^{-1}
0,45	+	0	10,5
0,45	+	0,45	4,1
0,45	+	2,85	2,7
0,45	+	5,7	2,0 (?)
0,45	+	8,7	

Es scheint sonach, daß Aktinium zwei Gattungen von β-Strahlen und eine oder zwei von γ-Strahlen besitzt. Die beiden Gattungen von β-Strahlen sind beide homogen und leicht, aber nicht in gleichem Maße, absorbierbar. Es ist natürlich möglich, daß nur eine Gattung von β-Strahlen vorliegt, und daß alle übrigen Strahlen γ-Strahlen sind. Die Frage kann nur dadurch entschieden werden, daß man photographische Aufnahmen von Aktiniumstrahlen macht, die in einem Magnetfeld abgelenkt worden sind. Mit einer derartigen Untersuchung ist Herr Dr. Godlewski gegenwärtig beschäftigt.

Es ist bemerkenswert, daß sowohl Uran als auch Aktinium homogene β-Strahlen besitzen, und daß diese Substanzen leicht absorbierbare γ-Strahlen hervorbringen. Thor und Radium hingegen haben heterogene β-Strahlen, und die entstehenden γ-Strahlen sind viel durchdringungsfähiger. Wir können also wohl den Schluß ziehen, daß die β-Teilchen mit der hohen Geschwindigkeit die γ-Strahlen mit der größeren Durchdringungsfähigkeit hervorbringen, und daß β-Strahlen von geringer Geschwindigkeit leicht absorbierbare γ-Strahlen erzeugen. Und hier haben wir nun eine auffallende Ähnlichkeit mit der Erzeugung von Röntgenstrahlen durch die Kathodenstrahlen. In einer „harten" Röhre mit einem guten Vakuum haben nämlich die Kathodenstrahlen eine hohe Geschwindigkeit, und wenn sie plötzlich aufgehalten werden, so entsteht eine durchdringungskräftige Gattung von Röntgenstrahlen. In einer „weichen" Röhre hingegen erzeugen die Kathodenstrahlen von geringer Geschwindigkeit leicht absorbier-

1) Es war nicht möglich, alle Ergebnisse dieser Arbeit in einer einzigen Figur darzustellen. In Figur 1 werden Radium und Thor mit Uranium verglichen und in Figur 2 Aktinium und Uran einander gegenübergestellt. Die Horizontalmaßstäbe in den beiden Figuren sind nicht dieselben.

bare Röntgenstrahlen. Ebenso ruft auch die plötzliche Aussendung von β-Strahlen mit hoher Geschwindigkeit hochgradig durchdringungsfähige γ-Strahlen hervor, und erzeugen die β-Strahlen von geringer Geschwindigkeit schwache γ-Strahlen. Im Falle von Uran und Aktinium scheinen keine β-Strahlen vorzukommen, die hinreichend schnell wären, um die am stärksten durchdringungsfähige Gattung von γ-Strahlen hervorzubringen, denn die β-Strahlen sind homogen und haben eine mehr oder weniger gleichförmige Geschwindigkeit.

Maßeinheit für die γ-Strahlen.

Der Verfasser meint, daß ein Kilogramm reinen Thoriumnitrats, in ein dünnes Glasgefäß von 16 cm Durchmesser eingeschlossen und luftdicht eingeschmolzen, eine geeignete Maßeinheit für die Untersuchung der in der ganzen Masse eines gegebenen Erzes enthaltenen Menge Radium oder Thor darstellen würde. Die γ-Wirkung könnte durch eine Bleischicht von 1 cm Dicke hindurch gemessen werden, und die Strahlen von Aktinium oder Uran würden dann praktisch ausgeschlossen sein. Die Versuchsergebnisse verschiedener Experimentatoren könnten auf Grund von Angaben in einer solchen Einheit leicht untereinander verglichen werden.

Konzentration und Abstand.

Wird der Abstand einer aktiven Substanz vom Boden des Elektroskops verändert, so ändert sich auch der Potentialabfall des Goldblättchens. Bei der Vergleichung zweier Substanzen muß man daher ihre Massenmittelpunkte in bezug auf das Elektroskop in dieselbe Lage bringen. Ich habe in roher Annäherung gefunden, daß sich die gemessene Aktivität umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung zwischen der aktiven Substanz und dem Mittelpunkte des Elektroskops ändert.

Um zu sehen, ob die beobachtete Wirkung von dem Konzentrationsgrad der zu untersuchenden Substanz abhängig sei, habe ich einige Stücke Pechblende zunächst in der Mitte und hernach auf dem Umfange einer Glasschüssel von 16 cm Durchmesser angeordnet. Die beobachtete Aktivität war um 3 v. H. größer, wenn sich die gesamte Pechblende nahe der Mitte der Schüssel befand. Wenn also die Schüssel voll wäre, so würde der von der Streuung herrührende Verlust ungefähr ein und einhalb v. H. betragen. Dieser Verlust beruht auf dem Umstande, daß der Strahlenkegel, der von dem Elektroskop geschnitten wird, verschieden groß ist, je nachdem ob ein aktives Teilchen sich im Mittelpunkt, oder ob es sich auf dem Umfang der Glasschüssel befindet.

Selbstabsorption.

Ich habe zwei Methoden angewendet, um mir ein Urteil über den Verlust an Aktivität infolge von Selbstabsorption seitens des Thoriumnitrats zu bilden. Im ersten Falle setzte ich das Elektroskop auf eine 0,64 cm dicke Unterlage aus Blei. Dann legte ich unter diese ein Kilogramm Thoriumnitrat. Die Aktivität wurde zu 2,3 gemessen. Nun wurde eine kleine Menge Radium in die Mitte der Masse gebracht, und die Gesamtaktivität betrug nunmehr 84,4. Darnach wurde die Aktivität des Radiums ohne das Thor zu 98,9 gefunden. Die Aktivität des Radiums war also durch die Absorption der halben Schichtdicke des Thoriumnitrats von 98,9 auf 82,1 herabgesetzt worden. Nun hat aber λ für Thor und für Radium denselben Wert, und in dem Thoriumnitrat absorbieren die mittleren Schichten in einem mittleren Grade. Wenn also die tatsächliche Ablesung für die Aktivität des Thoriumnitrats 100 beträgt, so würde der korrigierte Wert etwa 122 betragen.

Eine zweite Methode, die Selbstabsorption zu finden, bestand darin, daß Schicht nach Schicht gemessen wurde; die Schichten wurden in einer kreisrunden Schüssel von 16 cm Durchmesser aufeinander gehäuft, und das Ganze wurde so eingestellt, daß die mittlere Schicht sich immer in konstantem Abstand vom Elektroskop befand. Der Anstieg der Aktivität wurde durch eine gerade Linie dargestellt, wenn die Massen als Abszissen und die Aktivitäten als Ordinaten genommen wurden. Die Absorption einer dünnen Schicht von 200 Gramm konnte nicht groß sein, und durch schrittweise Annäherung wurde die Selbstabsorption zu ungefähr 15 v. H. für ein Kilogramm des Materials gefunden, wenn dieses sich unter einer 0,64 cm dicken Bleiplatte befand.

Diese beiden Ergebnisse befinden sich in roher Übereinstimmung. Außerdem folgten die Intensitäten, die für 1 Kilogramm Thoriumnitrat, für 1 Kilogramm Pechblende, für 2 Milligramm Radiumbromid und für 11 Milligramm Radiothorium gefunden wurden, derselben Kurve für verschiedene Dicken der Bleischicht. Man wird also wohl schließen dürfen, daß der Aktivitätsverlust eines Kilogramms Pechblende infolge von Selbstabsorption und mangelnder Konzentration durch Hinzufügen von 20 v. H. zu dem beobachteten Werte vollständig korrigiert werden kann, wenn die β-Strahlen durch eine 0,64 cm starke Bleischicht ausgeschieden werden.

Zusammenfassung.

1. Radium, Uraninit, Thor und Radiothorium senden γ-Strahlen aus, die von Blei im gleichen Maße absorbiert werden.

2. Für Dicken der Bleischicht zwischen 0,64 cm und 3,0 cm schwanken die Werte für λ für alle diese Substanzen von 0,57 bis 0,46.

3. Uraniumnitrat ist arm an γ-Strahlen, und diese werden leicht absorbiert; λ ist gleich 1,4 für Schichtdicken des Bleies zwischen 2,8 mm und 12,1 mm.

4. Aktinium sendet 4 Strahlengattungen aus:

1. α-Strahlen;
2. β-Strahlen, die homogen sind, mit $\lambda = 163$ (Godlewski);
3. Strahlen mit größerer Durchdringungsfähigkeit, und zwar entweder β- oder γ-Strahlen, mit $\lambda = 4{,}5$ (Godlewski), $\lambda = 4{,}1$ (Eve) für Schichtdicken des Bleies zwischen 0,45 mm und 2,8 mm;
4. Strahlen von höchster Durchdringungsfähigkeit, und zwar wahrscheinlich γ-Strahlen, mit $\lambda = 2{,}7$ bis 2,0 für Schichtdicken des Bleies von 2,8 mm bis zu 8,7 mm.

5. Ein Kilogramm Thoriumnitrat, in ein dünnes Glasgefäß von 16 cm Durchmesser eingeschmolzen und unter eine 1 cm dicke Bleischicht gebracht, könnte als geeignete Einheit für die Messung der in einer gegebenen Erzmasse enthaltenen Menge Radium oder Thorium angenommen werden.

6. Die Selbstabsorption der γ-Strahlen aus einem Kilogramm Thoriumnitrat in einem Gefäß von 16 cm Durchmesser und ungefähr 3,4 cm Tiefe ist von solcher Größenordnung, daß man zu den tatsächlich gewonnenen Ergebnissen ungefähr 18 v. H. hinzufügen muß. Bei der Benutzung als Maßeinheit muß man keine solche Korrektion anbringen.

Zum Schlusse benutze ich mit Freuden die Gelegenheit, Herrn Professor Rutherford meinen Dank auszusprechen für die Anregung zu diesen Versuchen und für das freundliche Interesse und die stets hilfsbereite Unterstützung, die er mir in gewohnter Weise hat zuteil werden lassen.

Mc Gill University, Montreal, 9. Dezember 1905.

(Aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 16. Februar 1907.)

Über das Verhältnis der Aktivitäten von Radium und Thor, gemessen durch ihre γ-Strahlung.

Von A. S. Eve.

Durch die neueren Arbeiten von Boltwood [1]) und Dadourian [2]) wird der Beweis dafür erbracht, daß bei den chemischen Prozessen zur Darstellung der im Handel erhältlichen Thoriumsalze ungefähr die Hälfte des in den radioaktiven Mineralien vorkommenden Radiothoriums abgesondert wird. Diese Tatsache ist seitens der beiden genannten Beobachter unabhängig voneinander festgestellt worden, und zwar hat der eine von ihnen die α-Aktivitäten der Mineralien und der Salze gemessen, der andere die Aktivitäten ihrer Emanationen verglichen. Auf diese Weise fanden sie im Thorianit auf ein Gramm Thor mehr Radiothorium als im Thoriumnitrat, und zwar war das Mengenverhältnis ungefähr 2,1 oder 2,6 zu 1. Boltwood hat des weiteren festgestellt, daß „die spezifische Aktivität des Thors mit den dem Gleichgewicht entsprechenden Mengen seiner Zerfallsprodukte konstant ist".

Die vorliegende Arbeit behandelt folgende Punkte:

I. Die Bestimmung des Verhältnisses zwischen den γ-Aktivitäten von Radium und von Thor, wenn beide sich im radioaktiven Gleichgewicht befinden;

II. die Feststellung der Mengenverhältnisse, in denen das Radiothorium im Thorianit beziehungsweise im Thoriumnitrat vorkommt, und zwar durch Messung der γ-Strahlung.

Der Zweck dieser Untersuchung war nicht sowohl, die Arbeiten von Boltwood und von Dadourian zu bestätigen, als vielmehr die γ-Strahlenmethode zu prüfen und festzustellen, ob die auf Grund dieser Methode gewonnenen Ergebnisse in guter Übereinstimmung stehen einerseits mit den nach der α-Strahlenmethode, andererseits mit den nach der Emanationsmethode erhaltenen. Es ergab sich, daß dies in der Tat der Fall war.

In einer früheren Arbeit [3]) habe ich nachgewiesen, daß die γ-Strahlen von Radium und von Thor beim Durchgang durch Blei genau in gleichem Maße absorbiert werden, während die γ-Strahlen von Uran viel leichter absorbiert werden. In derselben Arbeit habe ich auch das Verhältnis zwischen den γ-Aktivitäten von Radium und von Thor festgestellt; diese Feststellung war indessen fehlerhaft, insofern als ich für diese Bestimmung Thoriumnitrat benutzte und demnach, wie wir jetzt wissen, das

1) Sill. Journ. (4) **21**, 409, 415, 1906.
2) Sill. Journ. (4) **21**, 427, 1906.
3) Phil. Mag. (6) **11**, 586, 1906; diese Zeitschr. **8**, 183, 1907.

Thor nicht in radioaktivem Gleichgewicht war. Ferner ist festgestellt worden[1]), daß die zu beobachtende γ-Strahlung von im Gleichgewicht befindlichem Radium ausschließlich von Radium *C* herrührt. Beim Thor ist bekannt, daß die γ-Strahlen von Thorium *C* herrühren. Die γ-Strahlung von Thorium *C*, das natürlich ein Zerfallsprodukt des Radiothoriums ist, ist daher ein Maß für die vorhandene Menge Radiothorium. Wir müßten demnach erwarten, daß die γ-Strahlung von einem Thoriummineral oder einem Thoriumsalze der darin vorhandenen Menge Radiothorium proportional ist. Die Ergebnisse der Messungen an den γ-Strahlen mußten also im Einklang stehen mit denen der Messungen nach der α-Strahlen- und der Emanationsmethode.

Ich habe bei meinen Versuchen die γ-Strahlung in der üblichen Weise mittels eines Elektroskops gemessen.

Ich habe die folgenden Substanzen miteinander verglichen:

1. Radiumbromid. Dieses Präparat war 0,25 mg äquivalent, verglichen mit dem eingeschmolzenen Normalpräparat des Physikalischen Instituts der Mc. Gill University. Dieses Normalpräparat besteht aus 3,69 mg Radiumbromid und ergab nach den Untersuchungen von Rutherford für das Gramm eine Wärmewirkung von 110 Grammkalorien in der Stunde.

2. Thorianit von Ceylon, und zwar 454 g mit einem Gehalt von 11 v. H. Uran und 79 v. H. ThO_2.

3. Thoriumnitrat. Dieses Präparat stammte von Eimer & Amend und war vor Jahresfrist von ihnen bezogen worden. Es enthält 47 v. H. ThO_2.

Die Aktivitäten dieser drei Substanzen, an ihrer γ-Strahlung gemessen, standen im Verhältnis:

1. 18,5,
2. 8,34,
3. 1,38.

Diese Zahlen sind die Mittelwerte aus mehreren unter verschiedentlich abgeänderten Versuchsbedingungen angestellten Beobachtungen und geben die tatsächlich in einer Minute am Elektroskop beobachteten Skalenteile wieder.

Die spezifischen Aktivitäten.

1. Die Aktivität des Radiumbromids betrug unter den Versuchsbedingungen 18,5/0,25 für das Milligramm oder 74000 für das Gramm.

2. Die spezifische Aktivität des Thors im Thorianit erfordert einige Überlegung. Von den verwendeten 454 g Thorianit bestehen 360 g aus ThO_2 und 50 g aus Uran. Die γ-Strahlung des Urans allein kann vernachlässigt werden, denn durch die zur Verwendung gelangte Schichtdicke des Bleies hindurch konnte sie keine genügende Wirkung ausüben. Indessen wird mit dem Uran eine gewisse Menge Radium vergesellschaftet sein, und zwar in dem Verhältnis, wie es von Rutherford und Boltwood festgestellt worden ist. Demnach sind die 50 g Uran mit $50 \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-7}$ g Radium oder dem Äquivalent von $3{,}3 \cdot 10^{-5}$ g Radiumbromid vergesellschaftet. Nun hatten aber 0,25 mg Radium nach den Messungen am Elektroskop eine Aktivität von 18,5, und das in dem Thorianit vorhandene Radium würde daher eine Ablenkung von $(18{,}5/0{,}25) \cdot 3{,}3 \cdot 10^{-2} = 2{,}47$ Skalenteilen in der Minute hervorrufen. Ziehen wir diesen Betrag von der Gesamtaktivität des Thorianits, also von 8,34 ab, so erhalten wir eine Aktivität von 5,87, die dem Thor und all seinen Produkten zuzuschreiben ist. Die spezifische Aktivität ist also $5{,}87/360 = 0{,}0163$.

3. Eine Analyse des Thoriumnitrats ergab die Anwesenheit von 47 v. H. ThO_2. Demnach hatten 213 g ThO_2 eine Aktivität von 1,38 oder eine spezifische Aktivität von 0,0065.

Die hier angegebenen spezifischen Aktivitäten sind abhängig von dem benutzten Elektroskop, von der Dicke der verwendeten Bleischicht und von dem Abstand der Substanzen vom Elektroskop. Das gegenseitige Verhältnis der spezifischen Aktivitäten jedoch ist von den Versuchsbedingungen unabhängig, abgesehen von einer kleinen Korrektion wegen des Umstandes, daß die Substanzen nicht auf einen Punkt konzentriert werden können.

Es lassen sich also die folgenden Ergebnisse ableiten:

a) Thor und seine Produkte im Thorianit sind stärker aktiv als Thor und seine Produkte im Thoriumnitrat, und zwar im Verhältnis von 0,0163 zu 0,0065 oder von 2,5 zu 1.

b) Radiumbromid im radioaktiven Gleichgewicht ist stärker aktiv als eine gleiche Masse ThO_2 im radioaktiven Gleichgewicht, und zwar im Verhältnis von 74000 zu 0,0163 oder von $4{,}5 \cdot 10^6$ zu 1.

Also ist Radium $6{,}9 \cdot 10^6$mal so aktiv wie Thor, wenn beide im radioaktiven Gleichgewicht sind, wenn ihre Aktivität an den γ-Strahlen gemessen wird.

Ich habe in einer früheren Arbeit den Vorschlag gemacht, daß ein Kilogramm käufliches Thoriumnitrat eine geeignete Einheit für γ-Strahlenmessungen abgeben könnte. Dieser Vorschlag war nicht gut, denn, wie neuere Untersuchungen gezeigt haben, würde in einer solchen Einheit das Radiothor fortwährend zunehmen, und die Aktivität der Einheit würde sich in einem einstweilen noch unbekannten Verhältnisse ändern. Der einzige ausführbare Plan zur Beschaffung von Vergleichsgrößen

1) Sill. Journ. (4) **22**, 4, 1906.

scheint in der Vergleichung mit einem eingeschmolzenen Normalpräparat von Radiumbromid von bekanntem Gewicht und bekannter Reinheit zu bestehen.

Ergebnisse.

1. Radiumbromid ist $4{,}5 \cdot 10^6$mal so aktiv wie ThO_2, oder Radium ist $6{,}9 \cdot 10^6$mal so aktiv wie Thor, wenn sich beide im radioaktiven Gleichgewicht befinden, wenn man die Aktivitäten durch die γ-Strahlen mißt.

2. Das Verhältnis der in einem Gramm Thor in Thorianit und in Thoriumnitrat vorhandenen Mengen Radiothorium ist von Boltwood nach der α-Strahlenmethode, von Dadourian nach der Emanationsmethode und schließlich von mir nach der γ-Strahlenmethode gemessen worden. Die mittels dieser verschiedenen Methoden gewonnenen Ergebnisse stehen miteinander gut im Einklang.

Gern danke ich Herrn Professor Rutherford, der mich bei dieser Arbeit durch seine Ratschläge unterstützt hat.

Mc. Gill University, Oktober 1906.

(Aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 16. Februar 1907.)

BESPRECHUNGEN.

B. Monasch, Elektrische Beleuchtung. (Repetitorien der Elektrotechnik. 8. Band.) gr. 8. XII u. 229 S. mit 83 Abbildungen. Hannover, Dr. Max Jänecke. 1906. M. 5,60, gebunden M. 6,20.

Der Stoff ist wesentlich reichhaltiger, als man bei einem Repetitorium erwarten darf. Neben einem vorzüglichen Abschnitte über Photometrie werden alle gebräuchlichen Typen von Glüh- und Bogenlampen kritisch besprochen und ihre Lichtausstrahlung untersucht. Reichhaltige Literaturangaben ergänzen den Text.

R. Rüdenberg.

(Eingegangen 2. Dezember 1906.)

G. Huldschiner, Über das Pendeln parallelgeschalteter Drehstromgeneratoren. (Sammlung elektrotechnischer Vorträge. Herausgegeben v. E. Voit. IX. Band. 7./8. Heft.) gr. 8. 71 S. mit 17 Abbildungen und 6 Kurventafeln im Text. Stuttgart, F. Enke. 1906. M. 2,40.

Es werden Versuche beschrieben, die an künstlich ungleichförmig angetriebenen Drehstromdynamos angestellt wurden, um die Theorie des Pendelns zu prüfen. Als Kriterium ist das Resonanzverhältnis der Pendelwege gemessen. Zum Schlusse wird auf Grund der Rosenbergschen Anschauungen die Theorie auf mehrere ungleich gebaute Generatoren, die in Parallelschaltung laufen, erweitert und es werden die möglichen Resonanzfälle hergeleitet.

R. Rüdenberg.

(Eingegangen 2. Dezember 1906.)

H. Schröder, Ton und Farbe. System einer Charakteristik der Töne und der Tonarten übertragen auf das Gebiet der Farben und eine hieraus entstehende neue Farbenharmonie. Lex. 8. 20 S. mit 7 Farbentafeln. Berlin-Großlichterfelde, Chr. Fr. Vieweg. 1906. In Mappe M. 7.50.

Ein neuer Versuch, einen Zusammenhang zwischen den Farben des Spektrums und den Tönen der Skala zu konstruieren — als Spiel einer lebhaften Phantasie ganz nett, aber (trotz des Heranziehens einiger, zum Teil mißverstandener physikalischer Experimente) begreiflicherweise ohne tieferen Wert.

Wenige Worte genügen zur Erläuterung der Grundidee. Das Spektrum wird in einen Ring ausgebreitet, dunkelrot durch Purpur an Violett geschlossen. Der Ring wird in zwölf gleiche Sektoren geteilt; dem tiefroten Sektor wird die Note C zugeteilt und von da nach beiden Seiten im temperierten Quintenzirkel fortgeschritten, so daß auf der einen Seite G mit Hochrot, D mit Feuerrot, A mit Orange, u. s. f. auf der andern Seite F mit Purpur, B mit Lila u. s. f. folgen.

Die akkordischen Kombinationen mehrerer Töne werden nach den Mischfarben der Einzeltöne beurteilt und zwar benutzt der Verfasser dabei die Gemische der Pigmente, die nach ihm die reinsten Kombinationsfarben geben. So liefert die Mischung aller Spektralfarben ein „Erdbraun, die Farbe der Verwesung", wodurch der dem Zusammenklang aller Töne der Skala entsprechende „fürchterliche Mißklang" angedeutet wird.

Die Farben ihrer Hauptdreiklänge bestimmen weiter den Charakter einer Tonart. In C-dur (mit G-dur—F-dur) herrscht Rot vor; demgemäß „dürfte sich für eine C-dur-Stimmung

etwa ein Bild ‚Am Kamin' mit seinem intensiv roten und warmen Feuerschein eignen" — usw.

Man möchte an einen geistreichen Scherz, an eine anmutige Satire auf alle derartigen Bestrebungen glauben — aber das (übrigens üppig ausgestattete) Heft ist — leider — völlig ernst gemeint. W. Voigt.

(Eingegangen 14. Januar 1907.)

H. Schröder, Naturharmonien. Eine Abhandlung über Kombinationstöne und ihre Verstärkung durch den Violin-Vibrator, sowie über ihre Wirkung auf Harmonie und Tonfärbung mit einem praktischen Teile als Anhang. Zweistimmige Melodien für die Violine mit Vibrator. Lex. 8. 39 u. 11 S. Berlin-Großlichterfelde, Chr. Fr. Vieweg. 1906. M. 4.—.

Der Vibrator ist eine kleine träge Masse, die, am Griffbrett der Violine befestigt, auf deren Deckel ruht und durch ihr Mitschwingen bei mehrstimmigem Spiel die Kombinationstöne stärker hervortreten lassen soll. Der Verfasser knüpft an die Beschreibung seiner Erfindung Betrachtungen über die Theorie der Konsonanz und Dissonanz unter vielfacher Bezugnahme auf Helmholtz, denen aber ein wesentliches physikalisches Interesse nicht eignet.

W. Voigt.

(Eingegangen 14. Januar 1907.)

H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. (Aus Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. Bd. XVII.) gr. 8. VIII, 310 und 18 S. Tabellen. Leipzig, B. G. Teubner. 1906. M. 7.80, gebunden M. 8.40.

Dieses Lehrbuch, das aus den Vorlesungen des Verfassers hervorgegangen ist, ist zum größten Teile einer einführenden Darstellung der Kollektivmaßlehre gewidmet, an deren analytischer Ausgestaltung Bruns hervorragenden Anteil besitzt. Die große Bedeutung, die in neuerer Zeit die statistischen Methoden besonders in der Biologie und Psychologie erlangt haben, gab den Anstoß zu einer weitgehenden Fortbildung der in der Hauptsache von Fechner begründeten Kollektivmaßlehre. Die aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung hervorgehende mathematische Statistik basiert ihren analytischen Apparat auf die Voraussetzung, daß das jeweils vorliegende statistische Objekt das Gaußsche (Fehler-)Verteilungsgesetz erfüllt. Die Kollektivmaßlehre konstatiert, daß bis auf wenige Ausnahmen das Gaußsche Gesetz nur in groben Zügen zutrifft; selbst dann, wenn es sich um statistische Gesetzmäßigkeiten von großer Stabilität handelt. Dementsprechend stellt sie an die Spitze jeder statistischen Untersuchung die empirische Bestimmung der in jedem Fall tatsächlich vorhandenen Verteilung und überträgt auf sie alle jene weiteren Begriffsbildungen und Fragestellungen, die sonst an das Gaußsche Gesetz angeschlossen werden. Diese Übertragung erfordert aber weitgehende Verallgemeinerungen aller Begriffe und Methoden mit Rücksicht auf die größere Mannigfaltigkeit der nun in Betracht kommenden Verteilungsformen. Die erste Aufgabe besteht in der zweckmäßigen analytischen Darstellung der beobachteten Verteilung. Es liegen hier ältere Versuche von Bessel, Fechner, G. E. Müller, Pearson u. a. vor, die alle schon durch modifizierte Verteilungsformen eine bessere Übereinstimmung mit der Beobachtung erzielen wollten. Ein systematisches Interpolationsverfahren wurde vor einigen Jahren durch Bruns ausgearbeitet. Es besteht in der Entwicklung der beobachteten Verteilung nach einer willkürlich, aber zweckmäßig gewählten Reihe von Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \ldots$. Φ_1 ist die Gaußsche Fehlerfunktion, die Koeffizienten von Φ_2 und Φ_3 lassen sich durch passende Wahl des Nullwertes und der Maßbestimmung des Argumentes zum Verschwinden bringen. $\Phi_3, \Phi_4 \ldots$ (die sukzessiven Derivierten von Φ_1) stellen also die Abweichungen vom Fehlergesetz dar. (In den meisten Fällen sind nur die Glieder Φ_3 und Φ_4 von Belang. — Dem Buch sind die Tafeln für $\int_0^x \Phi_1\, dx$, Φ_1 bis Φ_6 beigegeben.) Denkt man sich die Verteilung in dieser Form dargestellt mit noch unbestimmten Koeffizienten, so repräsentiert diese Entwicklung alle Maßeigenschaften des allgemeinen Kollektivgegenstandes und man kann nun für ihn die Begriffe wie Streuung und alle praktisch wichtigen Mittelwertbildungen definieren: Ebenso ein zweckmäßiges Maß für die Abhängigkeit oder Unabhängigkeit, die zwischen den beiden Verteilungen besteht, die ein Kollektivgegenstand bezüglich zweier verschiedener Argumente besitzt (Korrelation). Ferner lassen sich so noch für die allgemeinen statistischen Objekte unter anderem folgende Fragen behandeln: Welche Besonderheiten zeigen Gesamtheiten von sehr großer und von kleiner Gliederzahl (Gesetz der großen Zahlen, Gesetz der kleinen Zahlen). Welche Arten von Zusammenfassungen von statistischen Gesamtheiten erzeugen eine zunehmende Annäherung an das Gaußsche Gesetz, welche eine zunehmende Abweichung? (Mischung der Argumente, Mischung der Verteilungen.) Ferner läßt sich allgemein die Technik jener Rechnungen ausbauen, die bei der Bearbeitung

jedes Kollektivgegenstandes wiederkehren. (Transformation der Argumente, Einfluß der Abrundung etc.) — Gerade die Zusammenfassung der Methoden, die der Behandlung aller statistischen Gesamtheiten gemeinsam sind, bildet den Gegenstand der Kollektivmaßlehre.

Die Brunssche Darstellung faßt nun die Wahrscheinlichkeitsrechnung als die Behandlung einer speziellen Gruppe von Kollektivgegenständen auf; hier bilden die Gesamtheit der verschiedenen denkbaren Ziehungsresultate des „Urnenschemas" oder Wurfresultate des Würfelschemas den zu untersuchenden Kollektivgegenstand: „Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ihrem mathematischen Inhalt nach lediglich eine Häufigkeitsrechnung" (S. 11), nämlich die Bestimmung der relativen Häufigkeit der verschiedenen Arten von Vorkommnissen im Schema. Bei dieser Auffassung besitzen die Lehrsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung mathematische Gewißheit. Davon strenge getrennt erscheint die Frage nach der Anwendbarkeit auf Gegenstände der Erfahrung: „Man muß erstens darauf verzichten, durch rein logische Deduktionen den Satz erhärten zu wollen, daß die Lehrsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine notwendige Geltung für die Vorgänge der Wirklichkeit besitzen; vielmehr läßt sich der Nachweis, daß jene Sätze zur Untersuchung beobachteter Ereignisse nun auch wirklich brauchbar seien, einzig und allein aus der Erfahrung führen. — Zweitens: Den Lehrsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, soweit sie sich in einem gegebenen Falle als brauchbar herausstellen, ist immer nur die Bedeutung einer Annäherung zuzusprechen." — Bruns gelangt durch diese Formulierung zu einer außerordentlich klaren und kritischen Darstellung aller prinzipiellen Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die zunehmende Bedeutung der kinetisch-statistischen Theorien in der Physik bringt die in diesem Buche behandelten Probleme dem Interesse des Physikers sehr nahe. Die Entstehung des Buches aus vieljährigen Vorlesungen spricht sich in der ungemeinen Lebendigkeit der Darstellung aus. Die zahlreichen geistreichen Zwischenbemerkungen über den Wert und Sinn der verschiedenen Fragestellungen machen die Lektüre des Buches anregend und genußvoll, auch da wo es sich um die abstraktesten Gegenstände handelt.

Paul Ehrenfest.

(Eingegangen 31. Januar 1907.)

A. Wagener, Indizieren und Auswerten von Kurbelweg- und Zeitdiagrammen. 8. VII u. 109 S. mit 45 Textfig. Berlin, J. Springer. 1906. M. 3,—

Der Verfasser hat in dem Büchlein eine Reihe von Erfahrungen zusammengestellt, die er bei noch nicht abgeschlossenen Versuchen mit „Indikatoren", — Instrumenten zur Aufzeichnung des Spannungsverlaufs und der Bewegungsvorgänge in Kolbenmaschinen — gemacht hat. Das Büchlein soll, wie im Vorwort gesagt ist, in erster Linie zum Weiterarbeiten an den behandelten Aufgaben auffordern, ohne selbst abschließende Resultate geben zu wollen.

H. Hort.

(Eingegangen 4. Dezember 1906.)

Tagesereignisse.

Herstellung eines Erdbebenapparates. Die permanente Kommission der Internationalen seismologischen Assoziation erläßt ein Preisausschreiben für die Konstruktion eines Seismometers für Nahbeben. Im Anzeigenteile dieser Nummer sind die näheren Bedingungen abgedruckt.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Breslau Dr. Erich Waetzmann für Physik, an der Universität Straßburg Dr. L. Mandelstam für Physik und der frühere Privatdozent der Chemie an der Universität München Dr. O. Freiherr v. d. Pfordten für Philosophie, an der Universität Würzburg Dr. Chr. Füchtbauer für Physik, an der Technischen Hochschule Graz Dr. Rudolf Sarazin für Eisenbahnmaschinenwesen, an der Universität Göttingen Dr. F. Krüger für Physik, an der Universität Lemberg Dr. Roman Negruß für physikalische Chemie und Elektrochemie.

Berufen: Zum o. Professor der Physik an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg der a. o. Professor der physikalischen Chemie an der Universität Göttingen Dr. Friedrich Dolezalek.

Ernannt: Der Maschinenkommissar der Staatsbahnen in Stanislau Sigismund Zagloba-Sochacki zum a. o. Professor der allgemeinen Maschinenkunde an der Technischen Hochschule in Lemberg, zum Vorsteher der physiologisch-chemischen Abteilung am Rudolf-Virchow-Krankenhause in Berlin der Privatdozent der physikalischen Chemie an der Universität Berlin Professor Dr. Walter Loeb.

In den Ruhestand: Der Professor der Mathematik an der technischen Hochschule Darmstadt Geh. Hofrat Dr. Sigmund Gundelfinger.

Verliehen: Dem Privatdozenten der Astronomie an der Universität Berlin Dr. Adolf Marcuse und dem Privatdozenten für Enzyklopädie der Mechanik und Maschinenlehre an der Technischen Hochschule Lemberg Stanislaw Zdobnicki der Titel eines a. o. Professors, dem ord. Professor für Maschinenelemente an der Technischen Hochschule Stuttgart Oberbaurat Adolf Ernst der erbliche Adel, dem Professor der Physik an der Universität München und Erfinder der Fernphotographie Dr. Arthur Korn der Orden der Ehrenlegion.

Gestorben: Der emeritierte ord. Professor der Pharmazie und allgemeinen Chemie an der Technischen Hochschule Braunschweig Dr. Robert Otto, der emeritierte ord. Professor der Mathematik an der Böhmischen Technischen Hochschule in Brünn Dr. Anton Sucharda.

Für die Redaktion verantwortlich Professor Dr. Emil Bose in Oliva bei Danzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.